



Implementación del método de elementos finitos para el modelamiento de un proceso de recobro mejorado

Fernando Valentin Abad Lopez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

Implementación del método de elementos finitos para el modelamiento de un proceso de recobro mejorado

Fernando Valentin Abad Lopez

Tesis presentada como requisito para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas Aplicadas

Director:
PhD. Mauricio Andres Osorio Lema

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia

Dedicatoria

Primero que todo dedico este trabajo a Dios, quien es el guía que ilumina mi vida. Además, es quien me brinda la fortaleza espiritual para salir adelante en momentos de adversidad.

Este trabajo también es dedicado a mis padres Fernando R. Abad y Carmen López, y a mis hermanos, Andrés, Ángela y Luis quienes siempre confiaron en mis capacidades para lograr culminar mis estudios de maestría, y además me brindaron todo su apoyo en los momentos difíciles.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mi asesor Mauricio, quien confió en mi para llevar a cabo este proyecto y por la paciencia que tuvo conmigo cuando necesité de alguna asesoría.

Deseo dar un agradecimiento especial a Colciencias, la ANH y a la UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA por su soporte, el cual está enmarcado en el proyecto "Plan nacional para el potenciamiento de la tecnología CEOR con gas mejorado químicamente" Contrato 273-2017.

Quiero agradecer a todos los profesores que tuve durante la maestría, ya que todos ellos contribuyeron a mi formación académica e integral. Por último, quiero agradecer también a mis compañeros y amigos de la universidad, ya que me brindaron apoyo en los momentos que los necesite.

Resumen

En el presente documento, se estudia el método de elementos finitos, para aproximar la solución a los problemas asociados con los fenómenos involucrados en un proceso de recobro mejorado de petróleo, el flujo de fluidos en medio poroso y la respuesta de la roca sometida a un estado de esfuerzos (geomecánica). Para el problema de flujo, se describe la ecuación de Darcy y algunas de sus variaciones, como por ejemplo cuando la permeabilidad depende de la presión de los fluidos y la ecuación de Darcy-Forchheimer usada para altas velocidades de flujo. Por otro lado se describe el problema geomecánico por medio de un modelo de elasticidad lineal y usando el coeficiente de Biot. Para ambos problemas se exponen los resultados teóricos de existencia y unicidad de la solución, así como también se hace el respectivo análisis de error.

palabras claves: Darcy, Elasticidad, Elementos Finitos, Existencia y unicidad, Análisis de error .

Abstract

In this document, the finite element method is studied to approximate the solution to problems associated with the phenomena involved in an enhanced oil recovery process, fluid flow in a porous medium and the rock response when subjected to a state of stress (geomechanics). For the flow problem, the Darcy's equation, and some of its variations, are described, such as when the permeability depends on the fluid pressure, and the Darcy-Forchheimer equation used for high flow velocities. On the other hand, the geomechanical problem is described by means of a linear elasticity model and using the Biot coefficient. For both problems the theoretical results of existence and uniqueness of the solution are exposed, also the respective theoretical error analysis is made.

Keywords: Darcy, Elasticity, Finite Elements, Existence and uniqueness, Error analysis.

Índice general

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
1. Ley de Darcy	1
1.1. Formulación del problema	1
1.2. Método Elementos Finitos Mixtos para el problema de Darcy (espacios $H(\text{div}; \Omega)$ y $L^2(\Omega)$)	3
1.2.1. Formulación variacional	3
1.2.2. Existencia y unicidad (problema continuo)	4
1.2.3. Formulación discreta	6
1.2.4. Existencia y unicidad (problema discreto)	7
1.2.5. Análisis de error	11
1.2.6. Implementación	13
1.3. Método Elementos Finitos Mixtos para el problema de Darcy (espacios $[L^2(\Omega)]^n$ y $H^1(\Omega)$)	16
1.3.1. Formulación variacional	16
1.3.2. Existencia y unicidad (problema continuo)	17
1.3.3. Formulación discreta	18
1.3.4. Existencia y unicidad (problema discreto)	19
1.3.5. Análisis de Error	19
1.3.6. Implementación	19
1.4. El método FEM para la ecuación de Darcy en 3D	22
1.4.1. Formulación discreta	22
1.4.2. Implementación	22
1.5. Experimentos Numéricos	25
1.5.1. Ejemplo 1	25
1.5.2. Ejemplo 2	29
1.5.3. Ejemplo 3	34
2. Darcy No Lineal	37
2.1. Permeabiliadad dependiente de la Presión	37
2.1.1. Problema Continuo	37
2.1.2. Problema discreto	40
2.1.3. Implementación	44
2.1.4. Dependencia exponencial de la Permeabilidad	45

2.2.	Ecuación de Darcy-Forchaimmer	53
2.2.1.	Formulación del problema	53
2.2.2.	Formulación variacional	54
2.2.3.	Existencia y unicidad de la solución del problema continuo	55
2.2.4.	Formulación variacional discreta	60
2.2.5.	Existencia y unicidad (Problema discreto)	60
2.2.6.	Implementación	62
2.3.	Experimentos Numéricos	64
2.3.1.	Ejemplo 1 ($\kappa(p)$ Acotado)	64
2.3.2.	Ejemplo 2 ($\kappa(p)$ Exponencial)	66
2.3.3.	Ejemplo 3 (Darcy Forchheimer)	69
3.	Geomecánica	72
3.1.	Generalidades	72
3.1.1.	Esfuerzos	72
3.1.2.	Deformación	74
3.1.3.	Relación entre Esfuerzo y Deformación	74
3.2.	Formulación del problema	75
3.3.	Existencia y unicidad	77
3.4.	Discretización por elementos finitos	78
3.4.1.	Análisis de Error	79
3.5.	Implementación	80
3.6.	Experimentos Numéricos	81
3.6.1.	Ejemplo 1	82
3.6.2.	Ejemplo 2	83
4.	Acople del modelo de flujo y geomecánico	86
4.1.	Descripción del modelo físico y matemático	86
4.2.	Modelo numérico y discretización del problema	88
4.3.	Estrategia iterativa	89
4.3.1.	Darcy no estacionario (Implementación)	90
4.3.2.	Ejemplo Darcy no estacionario	92
4.4.	Experimento numérico para el acople	94

Índice de figuras

1.5.1.	Darcy - Ejemplo 1 - Campo de velocidades - Formulación variacional 1	26
1.5.2.	Darcy - Ejemplo 1 - Gráfico de Presiones - Formulación variacional 1	26
1.5.3.	Darcy - Ejemplo 1 - Convergencia de errores - Formulación variacional 1	27
1.5.4.	Darcy - Ejemplo 1 - Campo de velocidades - Formulación variacional 2	28
1.5.5.	Darcy - Ejemplo 1 - Gráfico de presiones - Formulación variacional 2	28
1.5.6.	Darcy - Ejemplo 1 - Convergencia de errores - Formulación variacional 2	29
1.5.7.	Darcy - Ejemplo 2 - Dominio Ω	30
1.5.8.	Darcy - Ejemplo 2 - Campo de velocidades - Formulación variacional 1	30
1.5.9.	Darcy - Ejemplo 2 - Gráfico de presiones - Formulación variacional 1	31
1.5.10.	Darcy - Ejemplo 2 - Convergencia de errores - Formulación variacional 2	32
1.5.11.	Darcy - Ejemplo 2 - Campo de velocidades - Formulación variacional 2	32
1.5.12.	Darcy - Ejemplo 2 - Gráfico de presiones - Formulación variacional 2	33
1.5.13.	Darcy - Ejemplo 2 - Convergencia de errores - Formulación variacional 2	33
1.5.14.	Darcy - Ejemplo 3 - Campo de velocidades - Formulación variacional 2 - 3D	35
1.5.15.	Darcy - Ejemplo 3 - Convergencia de errores - Formulación variacional 2 - 3D	36
2.3.1.	Darcy No Lineal - Ejemplo 1 - Campo de velocidades - $\kappa(p)$ Acotado	65
2.3.2.	Darcy No Lineal - Ejemplo 1 - Gráfico de presiones - $\kappa(p)$ Acotado	65
2.3.3.	Darcy No Lineal - Ejemplo 1 - Convergencia de errores - $\kappa(p)$ Acotado	66
2.3.4.	Darcy No Lineal - Ejemplo 2 - Solución Problema Auxiliar - $\kappa(p)$ Exponencial	67
2.3.5.	Darcy No Lineal - Ejemplo 2 - Campo de velocidades - $\kappa(p)$ Exponencial	68
2.3.6.	Darcy No Lineal - Ejemplo 2 - Gráfico de presiones - $\kappa(p)$ Exponencial	68
2.3.7.	Darcy No Lineal - Ejemplo 2 - Tabla de errores - $\kappa(p)$ Exponencial	69
2.3.8.	Darcy No Lineal - Ejemplo 3 - Campo de velocidades - Darcy-Forchheimer	70
2.3.9.	Darcy No Lineal - Ejemplo 3 - Gráfico de presiones - Darcy-Forchheimer	70
2.3.10.	Darcy No Lineal - Ejemplo 3 - Convergencia de errores - Darcy-Forchheimer	71
3.1.1.	Geomecánica - Fuerzas sobre un plano inclinado	72
3.1.2.	Geomecánica - Esfuerzos Normales y de Cizalla sobre un cubo	73
3.6.1.	Geomecánica - Ejemplo 1 - Desplazamientos - 3D	82
3.6.2.	Geomecánica - Ejemplo 1 - Convergencia de Errores - Desplazamientos - 3D	83
3.6.3.	Geomecánica - Ejemplo 2 - Dominio Ω	83
3.6.4.	Geomecánica - Ejemplo 2 - Desplazamientos - 3D	84
3.6.5.	Geomecánica - Ejemplo 2 - Convergencia de Errores - Desplazamientos - 3D	85
4.3.1.	Estrategia iterativa de solución para el problema acoplado	90
4.3.2.	Darcy no estacionario - Campo de velocidades - 3D - $t = 1$	93

4.3.3.	Darcy no Estacionario - Ejemplo - Convergencia de Errores - 3D	93
4.4.1.	Acople - Ejemplo - Desplazamientos - 3D	94
4.4.2.	Acople - Ejemplo - Convergencia de Errores - Desplazamientos - 3D	95
4.4.3.	Acople - Campo de velocidades - 3D - $t = 1$	95
4.4.4.	Acople - Ejemplo - Convergencia de Errores - 3D	96

Índice de tablas

1.5.1.	Darcy - Ejemplo 1 - Tabla de Errores - Formulación variacional 1	27
1.5.2.	Darcy - Ejemplo 1 - Tabla de Errores - Formulación variacional 2	29
1.5.3.	Darcy - Ejemplo 2 - Tabla de Errores - Formulación variacional 1	31
1.5.4.	Darcy - Ejemplo 2 - Tabla de Errores - Formulación variacional 2	33
1.5.5.	Darcy - Ejemplo 3 - Tabla de Errores - Formulación variacional 2 - 3D	35
2.3.1.	Darcy No Lineal - Ejemplo 1 - Tabla de Errores - $\kappa(p)$ Acotado	66
2.3.2.	Darcy No Lineal - Ejemplo 2 - Tabla de Errores Problema Auxiliar - $\kappa(p)$ Exponencial	67
2.3.3.	Darcy No Lineal - Ejemplo 2 - Tabla de Errores - $\kappa(p)$ Exponencial	69
2.3.4.	Darcy No Lineal - Ejemplo 3 - Tabla de Errores - Darcy-Forchheimer	71
3.6.1.	Geomecánica - Ejemplo 1 - Tabla de Errores - Desplazamientos - 3D	82
3.6.2.	Geomecánica - Ejemplo 1 - Tabla de Errores - Desplazamientos - 3D	84
4.3.1.	Darcy no estacionario - Tabla de Errores - 3D	93
4.4.1.	Acople - Ejemplo 1 - Tabla de Errores - Desplazamientos - 3D	94
4.4.2.	Acople - Tabla de Errores - 3D	95

Introducción

El petróleo es una sustancia multicomponente muy importante e indispensable para diversas industrias, ya que a partir de éste, se obtienen combustibles, aceites, entre otros derivados, aparte de que sirve como materia prima para una gran variedad de productos. El petróleo normalmente se encuentra almacenado en los poros de una roca en el subsuelo (yacimiento) y es extraído a superficie a través de pozos por flujo natural o implementando algún método de levantamiento artificial. Sin embargo, la producción por estos mecanismos no supera el 40 % del petróleo in situ [19]. Debido a que la demanda de petróleo a nivel mundial es bastante alta, y los costos de exploración y perforación son muy elevados, los ingenieros tienen el reto de recuperar la mayor cantidad de petróleo de los yacimientos en producción.

Los Procesos de Recobro Mejorados [19], EOR por sus siglas en inglés (Enhanced Oil Recovery), son todas aquellas técnicas utilizadas para recuperar el petróleo que no puede ser producido económicamente por medios convencionales, y usan fuentes externas de energía o de materiales. Entre las técnicas más conocidas se encuentran las inyecciones, que pueden ser de agua, vapor, gas o algunos químicos. Con esto se busca entre otras cosas, brindarle un empuje hidráulico a los fluidos del yacimiento, modificando o no sus propiedades o las del medio, para que estos se puedan movilizar hacia las paredes del pozo y puedan ser producidos.

Los principales fenómenos físicos involucrados en un proceso de recobro mejorado, son el flujo de fluidos a través de un medio poroso, descrito por la ley de Darcy [8, 17, 18, 42], y las respuestas de las rocas ante los cambios en los esfuerzos a los que está sometida, estudiados por la geomecánica [1, 31, 32, 35]. Por un lado, la ecuación de Darcy, es una relación empírica que establece que la velocidad de flujo de un fluido en un medio poroso es proporcional al gradiente de presión del mismo [15] y es válida solo para bajas velocidades [18]. Por su parte, el modelo geomecánico, puede ser estudiado a partir de la ley de Hook, la cual establece que la deformación de un cuerpo es proporcional al esfuerzo aplicado [1].

El método de elementos finitos, estudiado en [3, 12, 13, 24, 30], es una herramienta fundamental para aproximar numéricamente la solución de una amplia clase de problemas de valores en la frontera, que surgen de las ciencias físicas y de diversos campos en ingeniería [24], entre los cuales se encuentran el análisis estructural, transferencia de calor, flujo de fluidos, transporte de masa y potencial electromagnético. Los fundamentos matemáticos de este método son sacados de resultados del Análisis Funcional. Tanto la ley de Darcy, como la de ley Hook, son problemas que han sido ampliamente estudiados utilizando el método de elementos finitos y algunas aplicaciones teórico-prácticas pueden encontrarse en [5, 26, 36, 39].

La presente tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 1, se estudiará la ecuación de Darcy para flujo monofásico, fluido incompresible y medio isotrópico, utilizando el método de elementos finitos mixtos. Para tal fin, se implementarán dos formulaciones variacionales diferentes. En el capítulo 2, se estudiarán dos versiones no lineales de la ecuación de Darcy, utilizando nuevamente el método de elementos finitos mixtos. En la primera de estas versiones, la no linealidad es introducida en el término de permeabilidad al depender de la presión del fluido, cuando ésta, altera la porosidad del medio. Por otro lado, en la segunda versión, la no linealidad es introducida al sumar un término cuadrático a la ecuación de Darcy, cuando se presentan altas velocidades de flujo. A esta ecuación modificada se le conoce como la ecuación de Darcy-Forchheimer. En el capítulo 3, se presentan inicialmente los conceptos fundamentales referentes a la mecánica de rocas y posteriormente se estudiará, utilizando el método de elementos finitos con formulación primal, la ecuación de elasticidad lineal, la cual es muy usada para modelar los procesos geomecánicos en las rocas. En el capítulo 4 se describe una estrategia iterativa para acoplar el modelo de flujo con el geomecánico, aparte de describir de forma breve la implementación por elementos finitos, la ecuación de Darcy para el estado no estacionario. Finalmente se presentan las conclusiones correspondientes, respecto a los aspectos más relevantes del estudio realizado.

En los primeros tres capítulos, se presentan las condiciones necesarias para garantizar la existencia y unicidad de la solución, además de realizar los pertinentes análisis de error. Al final de cada capítulo se muestran algunos experimentos numéricos y las respectivas tablas de error que dan cuenta de la convergencia del método de elementos finitos al aproximar las soluciones de los problemas planteados.

Capítulo 1

Ley de Darcy

1.1. Formulación del problema

El ingeniero Henry Darcy en 1856, propuso un modelo matemático simple que describe el flujo de un fluido viscoso e incompresible a través de un medio poroso rígido [17]. Este modelo fue obtenido de forma empírica al realizar experimentos observando el flujo de agua en camas de arenas. La ecuación de Darcy es de gran interés en ciencias y en ingenierías ya que es usada en diversas aplicaciones tales como en el diseño de filtros, flujos sanguíneos, secuestro de dióxido de carbono, contaminación de aguas subterráneas y recobro mejorado de petróleo, entre otras [25]. Básicamente establece que la velocidad de flujo (velocidad Darcy) es proporcional al gradiente de presión [15].

Para un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = \{2, 3\}$ con frontera Γ , medio poroso isotrópico, y flujo de una fase, la velocidad Darcy \mathbf{u} se expresa como

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}\rho}{\mu} (\nabla p - \mathbf{f}), \quad (1.1.1)$$

donde p es la presión, \mathbf{f} representa las fuerzas de volumen o gravitacionales, $\mu > 0$ y $\rho > 0$ son la viscosidad y la densidad del fluido respectivamente y $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el tensor de permeabilidad del medio [38].

Comentario 1.1.1. *La permeabilidad indica la facilidad con la que un medio poroso permite el flujo de fluidos a través de él, es decir, es una medida del grado de interconectividad de sus poros. Es una propiedad exclusiva del medio, por tanto, no depende de los fluidos contenidos. La permeabilidad es una cantidad positiva y para medios isotrópicos, este valor es igual en todas las direcciones por lo que \mathbf{K} es una matriz diagonal definida positiva con diagonal k .*

La condición de incompresibilidad del fluido implica que

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (1.1.2)$$

Resolviendo para \mathbf{f} en (1.1.1), teniendo en cuenta la condición (1.1.2) y bajo las condiciones de frontera apropiadas para el dominio Ω respecto a \mathbf{u} y p , el problema fuerte para la ecuación de

Darcy se puede escribir como:

$$(PF) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) & \text{tal que} & : \\ \frac{\mu}{k\rho} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en} & \Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{en} & \Omega \\ p = p_D & \text{sobre} & \Gamma_D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{sobre} & \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal exterior unitario a Γ .

Preliminares

Considere los siguientes espacios:

Sea $L^P(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones v medibles en Ω que satisfacen la siguiente condición

$$\int_{\Omega} |v|^P \leq \infty,$$

con norma

$$\|v\|_{P,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^P \right)^{1/P}.$$

Del mismo modo se define

$$[L^P(\Omega)]^n := \{ \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t : v_i \in L^P(\Omega), 1 \leq i \leq n \}.$$

Por convención, la norma L^P con $P = 2$ se subindiza con 0 en vez de 2. Además, considere también los siguientes espacios con sus respectivas normas:

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) : &= \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \right\} \\ \|v\|_{1,\Omega} &= \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}; \Omega) : &= \{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n : \operatorname{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \}. \\ \|\mathbf{v}\|_{\operatorname{div},\Omega} &= \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Considere también la existencia del operador traza $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, el cual es lineal y continuo, tal que $\gamma_0(v) = v|_{\Gamma}$. Definimos el espacio $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$. Además considere al operador $\gamma_n : H(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que para todo $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^n$, $\gamma_n(\mathbf{v}) = \gamma_0(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$. $H^{-1/2}(\Gamma)$ se define como el espacio dual de $H^{1/2}(\Gamma)$.

El problema de valores en la frontera dado por (1.1.3) se estudiará a continuación utilizando el metodo de elementos finitos mixtos [24], considerando dos formulaciones variacionales diferentes. En la primera se usarán los espacios $H(\text{div}; \Omega)$ y $L^2(\Omega)$, mientras que para la segunda formulación variacional se considerarán los espacios $[L^2(\Omega)]^n$ y $H^1(\Omega)$ para la velocidad Darcy y la presión del fluido respectivamente.

1.2. Método Elementos Finitos Mixtos para el problema de Darcy (espacios $H(\text{div}; \Omega)$ y $L^2(\Omega)$)

1.2.1. Formulación variacional

Por simplicidad, en esta sección, sean $H(\text{div}; \Omega) = H$ y $L^2(\Omega) = Q$. Para encontrar una primera formulación variacional para el problema fuerte de Darcy, se multiplica la primera ecuación de (1.1.3) con una función $\mathbf{v} \in H$ y se integra sobre el dominio,

$$\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Aplicando identidades de Green a la segunda integral, teniendo en cuenta la condiciones de frontera en (1.1.3) $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_N)$, se tiene

$$\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \text{div}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \langle \gamma_n(\mathbf{v})|_{\Gamma_D}, p_D \rangle_{\Gamma_D} - \langle \gamma_n(\mathbf{v})|_{\Gamma_N}, p \rangle_{\Gamma_N},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa un producto de dualidad. Por otro lado, si se multiplica la segunda ecuación de (1.1.3) con una función $-q \in Q$ y se integra, se tiene

$$- \int_{\Omega} q \text{div}(\mathbf{u}) = 0.$$

Definamos los siguientes espacios

$$\begin{aligned} H_{0N} &= \{\mathbf{v} \in H : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N\} \\ H_{gN} &= \{\mathbf{v} \in H : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = g \text{ en } \Gamma_N\}. \end{aligned}$$

La formulación variacional de (1.1.3) para datos $(\mathbf{f}, p_D) \in [L^2(\Omega)]^n \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ puede escribirse como:

$$(FVM) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) \in H_{gN} \times Q \text{ tal que} & : \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in H_{0N} \\ -b(\mathbf{u}, q) = G(q) & \forall q \in Q, \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} && \text{Forma bilineal } H \times H_{0N} \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} q \text{div} \mathbf{v} && \text{Forma bilineal } H_{0N} \times Q \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \langle \gamma_n(\mathbf{v})|_{\Gamma_D}, p_D \rangle_{\Gamma_D} && \text{Funcional lineal } H_{0N} \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(q) &= 0 && \text{Funcional lineal } Q \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comentario 1.2.1. Es de notar que H_{gN} no es un espacio vectorial. Sin embargo, la existencia y unicidad de la solución de (1.2.1) para una función g adecuada, se garantiza por la existencia y unicidad de la solución del problema homogéneo asociado, ya que si $g \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$, entonces existe un $\mathbf{w} \in H$ tal que $\gamma_n(\mathbf{w}) = g$. Así que haciendo $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, entonces se tiene que $\gamma_n(\mathbf{v}) = 0$ en Γ_N , por lo que \mathbf{v} satisface un problema homogéneo similar a (1.2.1).

1.2.2. Existencia y unicidad (problema continuo)

Para probar la existencia y unicidad de la solución de (1.2.1), sin pérdida de generalidad se asumirá el caso para $\mathbf{u} \in H_{0N}$ y para ello se deben satisfacer las condiciones del teorema de Babuska-Brezzi descritas en [12, 13, 24]. Primero notemos que:

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right| \\ &\leq \frac{\mu}{k\rho} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_{\text{div},\Omega} \|\mathbf{v}\|_{\text{div},\Omega}, \end{aligned}$$

se obtiene que a es acotada. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}, q)| &= \left| \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right| \\ &\leq \|q\|_{0,\Omega} \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|q\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{\text{div},\Omega}, \end{aligned}$$

por lo que b también es acotado. Para el funcional F , teniendo en cuenta el teorema de la traza normal en $H(\operatorname{div}; \Omega)$ [24], se tiene que

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{v})| &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right| + |\langle \gamma_n(\mathbf{v})|_{\Gamma_D}, p_D \rangle_{\Gamma_D}| \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|p_D\|_{1/2,\Gamma_D} \|\mathbf{v}\|_{-1/2,\Gamma_D} \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|p_D\|_{1/2,\Gamma_D} \|\mathbf{v}\|_{\text{div},\Omega} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_{\text{div},\Omega} \end{aligned}$$

así, el funcional F es acotado. Por último, debido a que $G(q) = 0 \quad \forall q \in Q$ se garantiza la continuidad de este funcional. Sea $B : Q \rightarrow H_{0N}$ el operador inducido por la forma bilineal b , entonces el kernel de B está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(B) &= \{ \mathbf{v} \in H_{0N} : B(\mathbf{v}) = 0 \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in H_{0N} : \langle B(\mathbf{v}), q \rangle = 0, \quad \forall q \in Q \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in H_{0N} : b(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in Q \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in H_{0N} : \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall q \in Q \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in H_{0N} : \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ en } \Omega \} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq C \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 = C \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 = C \|\mathbf{u}\|_{\text{div},\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}(B), \quad (1.2.2)$$

de donde se concluye que a es coerciva en $\mathcal{N}(B)$. Por otro lado, si consideremos el siguiente problema auxiliar

$$(PF) \begin{cases} \text{Hallar } z & \text{tal que} & : \\ \Delta z = q & \text{en} & \Omega \\ z = 0 & \text{sobre} & \Gamma_D \\ \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre} & \Gamma_N \end{cases} \quad (1.2.3)$$

y multiplicando (1.2.3) por una función $s \in H_{0D}^1(\Omega)$, donde

$$H_{0D}^1(\Omega) = \{s \in H^1(\Omega) : s = 0 \text{ en } \Gamma_D\},$$

se obtiene la siguiente formulación variacional:

$$(FVP) \begin{cases} \text{Hallar } z \in H_{0D}^1(\Omega) \text{ tal que} & : \\ \underbrace{\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla s}_{a_{aux}(z,s)} = - \underbrace{\int_{\Omega} qs}_{F_{aux}(s)} & \forall s \in H_{0D}^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Claramente a_{aux} y F_{aux} de (1.2.4) son una forma bilinear y un funcional lineal respectivamente. Por un lado, aplicando el teorema de Cauchy-Schwarz se tiene que:

$$|a_{aux}(z, s)| \leq |z|_{1,\Omega} |s|_{1,\Omega} \leq C \|z\|_{1,\Omega} \|s\|_{1,\Omega}. \quad (1.2.5)$$

Además, utilizando la desigualdad de Poincare [12]

$$a_{aux}(z, z) = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla z = |z|_{1,\Omega}^2 \geq C \|z\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall z \in H_{0D}^1. \quad (1.2.6)$$

Por otro lado,

$$|F(s)| \leq \|q\|_{0,\Omega} \|s\|_{0,\Omega} \leq C \|s\|_{1,\Omega}. \quad (1.2.7)$$

En consecuencia, de (1.2.5) y (1.2.6), a es acotada y coerciva en $H_{0D}^1(\Omega)$ y por su parte F por (1.2.7) es acotada. Por el teorema de Lax-Milgram [12, 13, 24, 30], la formulación variacional del problema auxiliar tiene solución única y además se garantiza la dependencia continua de los datos

$$|z|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}. \quad (1.2.8)$$

Sea $\hat{\mathbf{v}} = -\nabla z$, entonces de (1.2.4) por el concepto de derivada débil, se tiene que $\text{div}(\hat{\mathbf{v}}) = q$, así que teniendo en cuenta (1.2.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\text{div},\Omega}^2 &= \|\hat{\mathbf{v}}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div}(\hat{\mathbf{v}})\|_{0,\Omega}^2 \\ &= |z|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C^2 \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &= (C^2 + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Por tanto la condición inf-sup para la forma bilineal b de (1.2.1) se puede expresar usando (1.2.9) como:

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in H_{0N} \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\text{div}, \Omega}} \geq \frac{b(\hat{\mathbf{v}}, q)}{\|\hat{\mathbf{v}}\|_{\text{div}, \Omega}} = \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}})}{\|\hat{\mathbf{v}}\|_{\text{div}, \Omega}} = \frac{\|q\|_{0, \Omega}^2}{(C^2 + 1)^{1/2} \|q\|_{0, \Omega}} \geq \frac{1}{(C^2 + 1)^{1/2}} \|q\|_{0, \Omega}, \quad \forall q \in Q. \quad (1.2.10)$$

Dado que existe $\hat{C} = \frac{1}{(C^2 + 1)^{1/2}} > 0$, para el problema se satisface la condición inf-sup. Es de notar que $H_{0N} \subset H$. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de (1.2.2) y (1.2.10) se verifican las condiciones del teorema de Babuska-Brezzi, por lo que el problema (1.2.1) tiene solución única.

1.2.3. Formulación discreta

A continuación se estudiará la discretización por elementos finitos para el problema de Darcy para el caso bidimensional haciendo referencia a la formulación (1.2.1). Sea \mathcal{T}_h una partición regular de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ donde los elementos K son triángulos. Además $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \bar{\Gamma}$ y $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Sea también $\mathcal{E}_h = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ el conjunto de todos los lados en \mathcal{T}_h . Sean H_h el espacio de los polinomios de Raviart-Thomas [13, 24] y Q_h el espacio de las funciones constantes, espacios de dimensión finita de H y Q respectivamente. Luego

$$RT_0(\mathcal{T}_h) = H_h = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \begin{array}{ll} \forall K \in \mathcal{T}_h, & \mathbf{v}(\mathbf{x}) = a + b\mathbf{x}, \quad a \in \mathbb{R}^2, \quad b \in \mathbb{R} \\ \text{y} & \forall E \in \mathcal{E}_h, \quad [\mathbf{v}]_E \cdot \mathbf{n}_E = 0 \end{array} \right\}$$

$$Q_h = \{q_h \in Q : q_h|_K \in P_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.2.11)$$

También se definen los siguientes espacios auxiliares:

$$H_{hg} = \{\mathbf{v}_h \in RT_0(\mathcal{T}_h) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = g \text{ en } \Gamma_N\} \quad (1.2.12)$$

$$H_{h0} = RT_0 \cap H_{0N}. \quad (1.2.13)$$

Teniendo en cuenta los espacios anteriormente descritos, la formulación variacional discreta mixta para el problema de Darcy respecto a (1.2.1) se puede escribir como:

$$(FVDM) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h, p_h) \in H_{hg} \times Q_h \text{ tal que} & : \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) = F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in H_{h0} \\ -b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in Q_h, \end{array} \right. \quad (1.2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h && \text{Forma bilineal } H_h \times H_{h0} \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\mathbf{v}_h, q_h) &= \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h && \text{Forma bilineal } H_{h0} \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(\mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h - \langle \gamma_n(\mathbf{v}_h), p_D \rangle_{\Gamma_D} && \text{Funcional lineal } H_{h0} \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(q_h) &= 0 && \text{Funcional lineal } Q_h \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.4. Existencia y unicidad (problema discreto)

Teniendo en cuenta un argumento similar a lo expuesto en el comentario 1.2.1, sin pérdida de generalidad se estudiará el caso $\mathbf{u}_h \in H_{h0}$. Para probar la existencia y unicidad de la solución para la formulación variacional discreta (1.2.14), se sigue un procedimiento similar a lo hecho para el problema continuo.

Sea $B_h : H_{h0} \rightarrow Q_h$ el operador inducido por b para el problema discreto, entonces su kernel está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(B_h) &= \{\mathbf{v}_h \in H_{h0} : \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\} \\ &= \{\mathbf{v}_h \in H_{h0} : \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = 0 \text{ en } \Omega.\}\end{aligned}$$

Por tanto, para $\mathbf{v}_h \in \mathcal{N}(B_h)$ se tiene

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{v}_h \geq \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{v}_h \geq C \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 \geq C \|\mathbf{v}_h\|_{\operatorname{div},\Omega}^2,$$

así, a es coerciva en $\mathcal{N}(B_h)$. Por otro lado, se debe verificar la condición inf-sup para el problema discreto, es decir que existe $\beta_h > 0$ tal que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in H_{h0}} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\operatorname{div},\Omega}} \geq \beta_h \|q_h\|_{0,\Omega}, \quad \forall q \in Q. \quad (1.2.15)$$

Para ello se hará uso del teorema de Fortin [13, 24, 34]. El teorema de Fortin, básicamente establece que si $b : H_{0N} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal acotada y cumple la condición inf-sup continua, y si existe un operador $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_{0N}, H_{h0})$ tal que

$$\|\Pi_h\| \leq \hat{C}, \quad \forall h \quad \text{y} \quad b(\mathbf{v} - \Pi_h(\mathbf{v}), q_h) = 0,$$

entonces b satisface la condición inf-sup para los espacios discretos H_{h0} y Q_h .

Interpolador de Raviart-Thomas

Considere a $Z = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_K \in [H^1(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. Sean $\Pi_h^0 : H_{0N} \cap Z \rightarrow H_{h0}$ y $\Pi_K^0 : [H^1(K)]^2 \rightarrow RT_0$, el interpolador global y local de Raviart-Thomas de grado cero, tal que $\Pi_h^0(\mathbf{v})|_K = \Pi_K^0(\mathbf{v}|_K)$ para todo $\mathbf{v} \in H_{0N} \cap Z$. Además, relacionando la divergencia de los interpoladores en términos de proyectores ortogonales,

$$\mathcal{P}_K^0 : L^2(K) \rightarrow \mathbb{P}_0(K) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_h^0 : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h,$$

dado que $\operatorname{div}(\Pi_K^0(\mathbf{v})) \in \mathbb{P}_0(K)$ y $\operatorname{div}(\Pi_h^0(\mathbf{v})) \in Q_h$, se tiene

$$\operatorname{div}(\Pi_K^0(\mathbf{v})) = \mathcal{P}_K^0(\operatorname{div}(\mathbf{v})) \quad \text{y} \quad \operatorname{div}(\Pi_h^0(\mathbf{v})) = \mathcal{P}_h^0(\operatorname{div}(\mathbf{v})), \quad (1.2.16)$$

por lo que en consecuencia se tiene que

$$\int_K \psi \operatorname{div}(\Pi_K^0(\mathbf{v})) = \int_K \psi \operatorname{div}(\mathbf{v}), \quad \forall \psi \in \mathbb{P}_0(K) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\Pi_h^0(\mathbf{v})) = \int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\mathbf{v}), \quad \forall \psi \in Q_h$$

respectivamente [24].

Transformación de Piola

Considere también a \hat{K} como un elemento o triángulo de referencia, tal que sus vértices en el plano cartesiano están dados por $P_1 = (0, 0)^t$, $P_2 = (1, 0)^t$ y $P_3 = (0, 1)^t$. Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ existe una función afín $T_K : \hat{K} \rightarrow K$ biyectiva tal que $T_K(\hat{X}) = \mathbf{B}_K(\hat{X}) + \mathbf{b}_K$. Note que el Jacobiano de $T_K(\hat{X})$ es \mathbf{B}_K . Además se define la siguiente fórmula de cambio de variable

$$\int_{\hat{K}} f(T_K(\hat{X})) d\hat{X} = \int_K |\det \mathbf{B}_K|^{-1} f(X) dX, \quad (1.2.17)$$

donde f es una función cualquiera. A cada vector funcional $\hat{\mathbf{v}}$ definido en \hat{K} se le puede asociar un \mathbf{v} definido K y viceversa, usando la llamada Transformación de Piola [13, 24], esto es

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= |\det \mathbf{B}_K| \mathbf{B}_K^{-1} \mathbf{v} \circ T_K \\ \mathbf{v} &= |\det \mathbf{B}_K|^{-1} \mathbf{B}_K \hat{\mathbf{v}} \circ T_K^{-1}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de la Transformación de Piola, se obtienen los siguiente resultados,

$$\operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}) = |\det \mathbf{B}_K| \operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ T_K \quad (1.2.18)$$

$$\Pi_K^k(\hat{\mathbf{v}}) = \widehat{\Pi_K^k(\mathbf{v})} = |\det \mathbf{B}_K| \mathbf{B}_K^{-1} \Pi_K^k(\mathbf{v}) \circ T_K. \quad (1.2.19)$$

para todo $\mathbf{v} \in [H^1(K)]^n$

Lemas y Teoremas Auxiliares

Considere los siguientes lemas descritos en detalle en [24].

Lema 1.2.1. (*Bramble–Hilbert*). Sean m y k enteros no negativos tales que $0 \leq m \leq k+1$ y sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^{k+1}(S), H^m(S))$ tal que $\Pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \ \forall \mathbf{p} \in \mathbb{P}_k(S)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|q - \Pi(q)\|_{m,S} \leq C |q|_{k+1,S} \quad (1.2.20)$$

Lema 1.2.2. Sean S y \hat{S} conjuntos compactos y conexos de \mathbb{R}^n con frontera Lipschitz-continua, y sea $T_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función afín dado por $T_k(\hat{X}) = \mathbf{B}_k \hat{X} + \mathbf{b}_k \ \forall \hat{X} \in \mathbb{R}^n$ con \mathbf{B}_k matriz invertible y $\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $S = T_k(\hat{S})$. Sea m un entero no negativo, entonces

i) Para $q \in H^m(S)$ y $\hat{q} = q \circ T_k \in H^m(\hat{S})$, existe una constante $C(m, n) > 0$ tal que

$$|\hat{q}|_{m,\hat{S}} \leq C \|\mathbf{B}_k\|^m |\det \mathbf{B}_k|^{-1/2} |q|_{m,S}. \quad (1.2.21)$$

Inversamente, si $\hat{q} \in H^m(\hat{S})$ y $q = \hat{q} \circ T_k^{-1}$, entonces $q \in H^m(S)$ y existe una constante $C(n, m) > 0$ tal que

$$|q|_{m,S} \leq C \|\mathbf{B}_k^{-1}\|^m |\det \mathbf{B}_k|^{1/2} |\hat{q}|_{m,\hat{S}}. \quad (1.2.22)$$

ii) Para $\mathbf{v} \in [H^m(S)]^n$ y $\hat{\mathbf{v}} = |\det \mathbf{B}_k| \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{v} \circ T_k \in H^m(\hat{S})$, existe una constante $C(m, n) > 0$ tal que

$$|\hat{\mathbf{v}}|_{m, \hat{S}} \leq C \|\mathbf{B}_k^{-1}\| \|\mathbf{B}_k\|^m |\det \mathbf{B}_k|^{1/2} |\mathbf{v}|_{m, S}. \quad (1.2.23)$$

Inversamente, si $\hat{\mathbf{v}} \in [H^m(\hat{S})]^n$ y $\mathbf{v} = |\det \mathbf{B}_k|^{-1} \mathbf{B}_k \hat{\mathbf{v}} \circ T_k^{-1}$, entonces $\mathbf{v} \in [H^m(S)]^n$, y existe una constante $C(m, n) > 0$ tal que

$$|\mathbf{v}|_{m, S} \leq C \|\mathbf{B}_k\| \|\mathbf{B}_k^{-1}\|^m |\det \mathbf{B}_k|^{-1/2} |\hat{\mathbf{v}}|_{m, \hat{S}}. \quad (1.2.24)$$

iii) Sean

- h_s : Diámetro de S ,
- \mathfrak{d}_s : Diámetro de la circunferencia mas grande contenida en S ,
- \hat{h} : Diámetro de \hat{S} y
- $\hat{\mathfrak{d}}$: Diámetro de la circunferencia mas grande contenida en \hat{S} .

Entonces

$$|\det \mathbf{B}_k| = \frac{S}{\hat{S}}, \quad \|\mathbf{B}_k\| = \frac{h_s}{\mathfrak{d}} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{B}_k^{-1}\| = \frac{\hat{h}}{\mathfrak{d}_s}. \quad (1.2.25)$$

Teniendo en cuenta los lemas anteriores, se tienen las herramientas necesarias para probar el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$, existe una constante C independiente de h tal que

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h^0 \mathbf{v}\|_{\text{div}, \Omega} \leq Ch (|\mathbf{v}|_{1, \Omega} + |\text{div}(\mathbf{v})|_{1, \Omega}) \quad (1.2.26)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \Pi_h^0(\mathbf{v})\|_{\text{div}, \Omega}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v} - \Pi_h^0(\mathbf{v})\|_{\text{div}, K}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v} - \Pi_h^0(\mathbf{v})\|_{0, K}^2 + \|\text{div}(\mathbf{v}) - \text{div}(\Pi_h^0(\mathbf{v}))\|_{0, K}^2 \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Para el primer término del lado derecho de (1.2.27), teniendo en cuenta (1.2.19) y aplicando secuencialmente (1.2.24), (1.2.20), (1.2.23) y usando las relaciones geométricas dadas por (1.2.25) se tiene que

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h^0(\mathbf{v})\|_{0, K} \leq C \frac{h_K^2}{\mathfrak{d}_K} |\mathbf{v}|_{1, \Omega}.$$

por la regularidad de la malla, existe una constante $\hat{C} > 0$ tal que $\frac{h_K}{\vartheta_K} < \hat{C}$, por tanto

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h^0(\mathbf{v})\|_{0,K} \leq Ch_K |\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \quad (1.2.28)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta a (1.2.19) y el cambio de variable (1.2.17), se tiene que

$$\widehat{\operatorname{div}(\mathbf{v})} - \operatorname{div}(\widehat{\Pi_K^0(\mathbf{v})}) = |\det \mathbf{B}_K|^{-1} (\operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}) - \operatorname{div}(\Pi_{\hat{K}}^0(\hat{\mathbf{v}}))), \quad (1.2.29)$$

luego, para el segundo término de (1.2.27), aplicando (1.2.22), considerando (1.2.29) y (1.2.16), luego (1.2.20), (1.2.21) y finalmente las relaciones geométricas dadas por (1.2.25) se tiene que

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \Pi_K^0(\mathbf{v})\|_{0,K} \leq Ch |\operatorname{div}(\mathbf{v})|_{1,K}. \quad (1.2.30)$$

Reemplazando (1.2.28) y (1.2.30) en (1.2.27) se obtiene (1.2.26). \blacksquare

Por el teorema anterior y aplicando desigualdad triangular, entonces se tiene que

$$\|\Pi_K^0(\mathbf{v})\|_{\operatorname{div},\Omega} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \quad (1.2.31)$$

Por otro lado, considere el siguiente problema auxiliar

$$(PF) \begin{cases} \text{Hallar } z \text{ tal que :} \\ -\Delta z = \operatorname{div}(\mathbf{v}) & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases}$$

Multiplicando por una función $s \in H_{0D}^1(\Omega)$, integrando y aplicando identidades de Green, se tiene

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla s}_{a_{aux}(z,s)} = \underbrace{\int_{\Omega} s \operatorname{div}(\mathbf{v})}_{F_{aux}(s)} \quad \forall s \in H_{0D}^1(\Omega), \quad (1.2.32)$$

donde aplicando el teorema de Lax-Milgram, es fácil verificar que a_{aux} es una forma bilineal continua y coerciva, y F_{aux} es un funcional lineal y continuo, por lo que (1.2.32) tiene solución única y además $|z|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}$. Haciendo $\hat{\mathbf{v}} = -\nabla z$, por definición de derivada débil en (1.2.32), se tiene entonces que

$$\operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.2.33)$$

y además $\|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}$.

Si se define al operador de Fortin como $\Pi_h(\mathbf{v}) := \Pi_h^0(\hat{\mathbf{v}})$, entonces se sigue por (1.2.31) que

$$\|\Pi_h(\mathbf{v})\|_{\operatorname{div},\Omega} = \|\Pi_h^0(\hat{\mathbf{v}})\|_{\operatorname{div},\Omega} \leq C \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\Omega} \leq \bar{C} \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega},$$

por lo que el operador de Fortin es acotado. Además teniendo en cuenta (1.2.16), (1.2.33) y dado que \mathcal{P}_h^0 es un proyector ortogonal de $L^2(\Omega)$ en Q_h , entonces para todo $q_h \in Q_h$ se tiene

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{v} - \Pi_h(\mathbf{v}), q_h) &= \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\Pi_h(\mathbf{v}))) \\
&= \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\Pi_h^0(\hat{\mathbf{v}}))) \\
&= \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \mathcal{P}_h^0(\operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}))) \\
&= \int_{\Omega} q_h (\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \mathcal{P}_h^0(\operatorname{div}(\mathbf{v}))) = 0.
\end{aligned}$$

Por el desarrollo anterior y aplicando el teorema de Fortin, concluimos que la condición inf-sup discreta se satisface. De aquí, podemos asegurar que el problema discreto (1.2.14) tiene solución y es única.

1.2.5. Análisis de error

En este apartado se presenta el análisis del error obtenido al aproximar el problema de Darcy con el método de elementos finitos mixtos, como se ha descrito a lo largo de la presente sección. Para tal fin, se tendrán en cuenta los resultados de coercividad de a y condición inf-sup para b .

Llamemos

$$Z_h(G) = \{w_h \in H_{h0} : b(w_h, q_h) = G(q_h) \forall q_h \in Q_h\}.$$

Claramente este conjunto es no vacío por la sobreyectividad del operador B_h , garantizada por la condición inf-sup discreta. Del mismo modo, dado un \mathbf{v}_h cualquiera en H_{h0} , se garantiza la existencia de $\mathbf{r}_h \in H_{h0}$ tal que

$$b(\mathbf{r}_h, q_h) = b(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h$$

y además

$$\|\mathbf{r}_h\|_H \leq \frac{1}{\beta_h} \|B_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_Q. \quad (1.2.34)$$

Sea $\mathbf{w}_h = \mathbf{r}_h + \mathbf{v}_h$. Por lo descrito anteriormente y por la segunda ecuación de (1.2.14), se tiene que

$$b(\mathbf{w}_h, q_h) = b(\mathbf{r}_h + \mathbf{v}_h, q_h) = b(\mathbf{u}, q_h) = b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0,$$

por lo que $\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h \in \mathcal{N}(B_h)$.

Partiendo de la coercividad de a se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{C} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_h &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{N}(B_h)} \frac{a(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_H} \\
&\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{N}(B_h)} \frac{a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_H}
\end{aligned}$$

sustrayendo (1.2.1) de (1.2.14) con $\mathbf{v}_h \in \mathcal{N}(B_h)$ como función de prueba, se tiene que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= b(\mathbf{v}_h, p_h - p) \\ &= b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h) - b(\mathbf{v}_h, p - q_h) \\ &= -b(\mathbf{v}_h, p - q_h). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\bar{C} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_H \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{N}(B_h)} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h - p) + a(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_H},$$

entonces

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_H \leq \frac{\|B_h\|}{\bar{C}} \|p - q_h\|_Q + \frac{\|A_h\|}{\bar{C}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_H,$$

luego por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_H + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_H \\ &\leq \left(\frac{\|A_h\|}{\bar{C}} + 1 \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_H + \frac{\|B_h\|}{\bar{C}} \|p - q_h\|_Q. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente desigualdad triangular y por (1.2.34), se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_H &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_H + \|\mathbf{w}_h - \mathbf{v}_h\|_H \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_H + \|\mathbf{r}_h\|_H \\ &\leq \left(1 + \frac{\|B_h\|}{\beta_h} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_H. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H \leq \left(\frac{\|A_h\|}{\bar{C}} + 1 \right) \left(1 + \frac{\|B_h\|}{\beta_h} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_H + \frac{\|B_h\|}{\bar{C}} \|p - q_h\|_Q. \quad (1.2.35)$$

Por otro lado, de la condición inf-sup discreta (1.2.15), se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_h \|p_h - q_h\|_Q &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in H_{h0}} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_H} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in H_{h0}} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - p) + b(\mathbf{v}_h, p - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_H} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in H_{h0}} \frac{a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_H}, \end{aligned}$$

así

$$\|p_h - q_h\|_Q \leq \frac{\|A_h\|}{\beta_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H + \frac{\|B_h\|}{\beta_h} \|p - q_h\|_Q.$$

Por desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_Q &\leq \|p - q_h\|_Q + \|p_h - q_h\|_Q \\ &\leq \left(\frac{\|B_h\|}{\beta_h} + 1 \right) \|p - q_h\|_Q + \frac{\|A_h\|}{\beta_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H. \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

Sumando (1.2.35) y (1.2.36)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H + \|p - p_h\|_Q \leq \hat{C} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_H + \|p - q_h\|_Q),$$

por el teorema de la mejor aproximación [23], en particular se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H + \|p - p_h\|_Q \leq \hat{C} (\text{dist}(\mathbf{u}, H_{h0}) + \text{dist}(p, Q_h)) \quad (1.2.37)$$

Por un lado, considerando al proyector ortogonal $\mathcal{P}_{\text{div},h}^0 : H_{0N} \rightarrow H_{h0}$ y teniendo en cuenta (1.2.26)

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{u}, H_{h0}) &:= \|\mathbf{u} - \mathcal{P}_{\text{div},h}^0(\mathbf{u})\|_{\text{div},\Omega} \leq \|\mathbf{u} - \Pi_h^0(\mathbf{u})\|_{\text{div},\Omega} \\ &\leq Ch(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\text{div}(\mathbf{u})|_{1,\Omega}). \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $\hat{\Pi}_h^0 : C(\bar{\Omega}) \rightarrow Q_h$, el interpolador global de Lagrange, y considere al proyector $\mathcal{P}_h^0 : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h$. De [24] se obtiene que

$$\text{dist}(p, Q_h) := \|p - \mathcal{P}_h^0(p)\|_{0,\Omega} \leq \|p - \hat{\Pi}_h^0(p)\|_{0,\Omega} \leq Ch|q|_{1,\Omega}, \quad (1.2.38)$$

por tanto

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_H + \|p - p_h\|_Q \leq \hat{C}h(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\text{div}(\mathbf{u})|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega}).$$

1.2.6. Implementación

Sea $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$ una base para H_h con N número de lados en \mathcal{T}_h y sea $\{\varphi_l\}_{l=1}^L$ una base para Q_h tal que $\varphi_l = 1$ en el elemento l y 0 en otra parte. Acá L representa el número de elementos en \mathcal{T}_h , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i, \\ p_h &= \sum_{i=1}^L \eta_i \varphi_i, \end{aligned}$$

luego la formulación variacional discreta (1.2.14) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i a(\Psi_i, \Psi_j) - \sum_{i=1}^L \eta_i b(\varphi_i, \Psi_j) &= F(\Psi_j) \\ - \sum_{i=1}^N \eta_i b(\Psi_i, \varphi_l) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Matricialmente lo anterior se puede ver como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}^t \\ -\mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_F \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $A_{i,j} = a(\Psi_i, \Psi_j)$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{L \times N}$, $B_{i,j} = b(\Psi_i, \varphi_l)$, $\mathbf{b}_F \in \mathbb{R}^N$, $b_{Fj} = F(\Psi_j)$.

Considerando lo hecho anteriormente, entonces

$$\begin{aligned} a(\Psi_i, \Psi_j) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \Psi_i \cdot \Psi_j = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\mu}{k\rho} \int_K \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K \\ b(\Psi_i, \varphi_l) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\Psi_i) \varphi_l = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(\Psi_i^K) \varphi_l^K \\ F(\Psi_j) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_j - \int_{\Gamma_D} p_D(\Psi_j \cdot \mathbf{n}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_j^K - \sum_{E \subset \Gamma_D} \int_E p_D(\Psi_j^K \cdot \mathbf{n}), \end{aligned}$$

donde Ψ_j^K y φ_l^K son las respectivas funciones asociadas a cada triángulo K .

Comentario 1.2.2. $\Psi_j^K \subset RT_0$ son funciones asignadas a los lados del triángulo K , por ende $j = 1, 2, 3$ localmente. Por su parte, φ_l^K es asignada por elemento por tanto $l = 1$. Así que $A^K \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $B^K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$.

Se define ahora la forma de las funciones bases Ψ_j^K . Sean E_1, E_2, E_3 los lados del triángulo K , P_1, P_2, P_3 sus respectivos vértices opuestos, y sea \mathbf{n}_{E_j} el vector normal unitario al lado E_j escogido con una orientación global fija, mientras que \mathbf{n}_j es el vector normal exterior del triángulo K a lo largo del lado E_j , entonces

$$\Psi_j^K(X) := \sigma_j \frac{|E_j|}{2|K|} (X - P_j), \quad \sigma_j = \mathbf{n}_{E_j} \cdot \mathbf{n}_j = \pm 1, \quad (1.2.39)$$

donde $|E_j|$ es la medida del lado j en el triángulo y $|K|$ el área de éste. Además,

- i) $\Psi_j^K(X) \cdot \mathbf{n}_{E_i} = \delta_{ij}$,
- ii) $\Psi_j^K \in RT_0(K)$,
- iii) $\Psi_1^K, \Psi_2^K, \Psi_3^K$ son una base para $RT_0(K)$,
- iv) $\operatorname{div} \Psi_j^K = \sigma_j \frac{|E_j|}{|K|}$.

Los anteriores enunciados son demostrados en [9, 11]. Teniendo en cuenta (1.2.39), las componentes de la matriz local \mathbf{A}^K están dadas por:

$$A_{ij}^K = \frac{\mu}{k\rho} \int_K \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K = \sigma_i \sigma_j \frac{|E_i||E_j|}{4|K|^2} \frac{\mu}{k\rho} \int_K (X - P_j) \cdot (X - P_i).$$

Sean ξ_1, ξ_2, ξ_3 las coordenadas baricéntricas de $X \in K$, entonces

$$\Psi_j^K(X) = \sigma_{E_j} \frac{|E_j|}{2|K|} (\xi_1(X)(P_1 - P_j) + \xi_2(X)(P_2 - P_j) + \xi_3(X)(P_3 - P_j)),$$

por lo que

$$A_{i,j}^K = \sigma_i \sigma_j \frac{|E_i||E_j|}{4|K|^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{\mu}{k\rho} \int_K \xi_r \xi_s (P_r - P_j) \cdot (P_s - P_i).$$

Usando la fórmula de cuadratura del punto medio, $\int_K \xi_r \xi_s = \frac{|K|}{12} (1 + \delta_{r,s})$ [3]. Luego

$$A_{i,j}^K = \frac{1}{48|K|} \sigma_i |E_i| \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_{r,s}) \frac{\mu}{k\rho} (P_r - P_j) \cdot (P_s - P_i) \sigma_j |E_j|.$$

La expresión anterior puede ser reescrita como

$$A_{i,j}^K = \frac{1}{48|K|} \sigma_i |E_i| \mathbf{v}_i^t \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{v}_j \sigma_j |E_j|, \quad (1.2.40)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \begin{bmatrix} P_1 - P_i \\ P_2 - P_i \\ P_3 - P_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}, & \mathbf{v}_j &= \begin{bmatrix} P_1 - P_j \\ P_2 - P_j \\ P_3 - P_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}, \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, & \mathbf{M} &= \frac{\mu}{k\rho} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & \\ & \mathbf{I} & \\ & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta las nueve componentes de \mathbf{A}^K , ésta se puede representar como

$$\mathbf{A}^K = \frac{1}{48|K|} \mathbf{Q} \mathbf{V}^t \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{Q} \quad (1.2.41)$$

con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_1 |E_1| & & \\ & \sigma_2 |E_2| & \\ & & \sigma_3 |E_3| \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & P_1 - P_2 & P_1 - P_3 \\ P_2 - P_1 & 0 & P_2 - P_3 \\ P_3 - P_1 & P_3 - P_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}.$$

Por otro lado, la matriz $\mathbf{B}^K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ está dada por

$$B_{1,j}^K = \int_K \operatorname{div}(\Psi_j) \varphi_1 = \sigma_j \frac{|E_j|}{|K|} |K|.$$

Así

$$\mathbf{B}^K = [\sigma_1 |E_1| \quad \sigma_2 |E_2| \quad \sigma_3 |E_3|]. \quad (1.2.42)$$

Sea \mathbf{b}_F^K el vector local correspondiente al funcional $F(\cdot)$, entonces sus componentes pueden calcularse como:

$$b_{Fj}^K = \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_j^K - \int_E p_D(\Psi_j^K \cdot \mathbf{n}) \text{ para } j = 1, 2, 3.$$

Por un lado se tiene que

$$\int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_j^K = \sigma_j \frac{|E_j|}{2|K|} \int_K \mathbf{f} \cdot (X - P_j).$$

Sean P_{m1}, P_{m2}, P_{m3} los puntos medios de los lados del triángulo K , implementado la fórmula cuadratura de integración de puntos medios en triángulos [48], entonces

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_j^K &\Rightarrow \begin{bmatrix} \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_1^K \\ \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_2^K \\ \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_3^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 |E_1|}{2|K|} \int_K \mathbf{f} \cdot (X - P_1) \\ \frac{\sigma_2 |E_2|}{2|K|} \int_K \mathbf{f} \cdot (X - P_2) \\ \frac{\sigma_3 |E_3|}{2|K|} \int_K \mathbf{f} \cdot (X - P_3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \sigma_1 |E_1| (\mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m1} - P_1) + \mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m2} - P_1) + \mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m3} - P_1)) \\ \sigma_2 |E_2| (\mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m1} - P_2) + \mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m2} - P_2) + \mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m3} - P_2)) \\ \sigma_3 |E_3| (\mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m1} - P_3) + \mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m2} - P_3) + \mathbf{f}(P_{m1}) \cdot (P_{m3} - P_3)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

Por último la integral dada por la condición Dirichlet se puede calcular como

$$\int_E p_D(\Psi_j^K \cdot \mathbf{n}) \approx \int_E p_D = |E_j| p_D(P_m) \quad (1.2.44)$$

donde P_m es el punto medio del lado E_j .

Comentario 1.2.3. Para la formulación variacional utilizada en esta sección, las condiciones de frontera Dirichlet aparecen de forma natural. La condición de frontera Neumann es impuesta de manera fuerte en el programa principal, por condensación de datos, ver [9].

1.3. Método Elementos Finitos Mixtos para el problema de Darcy (espacios $[L^2(\Omega)]^n$ y $H^1(\Omega)$)

1.3.1. Formulación variacional

En esta sección llamaremos $[L^2(\Omega)]^n = Q$ y $H^1(\Omega) = H$. A continuación se estudiará la solución del problema de Darcy empleando una segunda formulación variacional trabajando en los espacios Q con $n = \{2, 3\}$ y H . Para ello, se multiplica la primera ecuación diferencial de (1.1.3) por una función $\mathbf{v} \in Q$ e integrando se tiene

$$\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.3.1)$$

luego se multiplica la segunda ecuación diferencial de (1.1.3) con una función $q \in H_{0D}^1(\Omega)$ (espacio descrito por (1.2.4)) y se integra. Así que, aplicando integración por partes y usando la condición de frontera Neumann dada por (1.1.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_N} q(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q \\ &= \langle g, q \rangle_{\Gamma_N} - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Considere los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} H_{pD}^1(\Omega) &:= \{q \in H : q = p_D \text{ en } \Gamma_D\} \\ H_{00}^{1/2}(\Gamma_N) &:= \{\eta \in H^{1/2}(\Gamma_N) : E_{N,0}(\eta) \in H^{1/2}(\Gamma)\}, \end{aligned}$$

donde $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow L^2(\Gamma)$ es el operador Extensión definido como

$$E_{N,0}(\eta) := \begin{cases} \eta & \text{sobre } \Gamma_N \\ 0 & \text{sobre } \Gamma_D \end{cases} \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma_N).$$

Entonces de (1.3.1) y (1.3.2), para $(\mathbf{f}, g) \in [L^2(\Omega)]^n \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$ se tiene que la segunda formulación variacional queda

$$(FVM) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) \in Q \times H_{pD}^1(\Omega) \text{ tal que :} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) \quad \forall q \in H_{0D}^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} && \text{Forma bilineal } Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q && \text{Forma bilineal } Q \times H_{0D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(v) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} && \text{Funcional lineal } Q \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(q) &= \langle g, q \rangle_{\Gamma_N} && \text{Funcional lineal } H_{0D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comentario 1.3.1. Claramente $H_{pD}^1(\Omega)$ no es un espacio vectorial afín, ya que si $q_1, q_2 \in H_{pD}^1(\Omega)$, entonces $q_1|_{\Gamma_D} = p_D$ y $q_2|_{\Gamma_D} = 0$; por tanto $(q_1 + q_2)|_{\Gamma_D} = 2p_D$, es decir, no cumple con la condición de ser cerrado bajo la suma. Sin embargo, si $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_N)$, existe un $r \in H$ tal que $r|_{\Gamma_D} = p_D$. Por lo que haciendo $q = p - r$ se tiene que $q|_{\Gamma_D} = 0$ y satisface un problema homogéneo similar a (1.3.3).

1.3.2. Existencia y unicidad (problema continuo)

Nuevamente, para probar la existencia y unicidad del problema variacional (1.3.3), se procede de forma análoga a lo hecho en la sección anterior, es decir que se deben verificar las condiciones del teorema de Babuska-Brezzi. Dado que se está considerando un medio isotrópico, \mathbf{K}^{-1} es un tensor diagonal de componentes constantes e iguales, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right| \leq C \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\ |b(\mathbf{v}, q)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \|q\|_{1,\Omega} \\ |F(\mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right| \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\ |G(q)| &= |\langle g, q \rangle_{\Gamma_N}| \leq |g|_{-1/2,\Gamma_N} |q|_{1/2,\Gamma_N} \leq C \|q\|_{1,\Omega} \quad (\text{Por teorema de la traza [24]}) \end{aligned}$$

Es claro que las formas bilineales a y b y los funcionales F y G son acotados. De forma similar a lo hecho en (1.2.2) para la coercividad se tiene que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq C \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in Q,$$

a es coerciva en todo $[L^2(\Omega)]^n$ por tanto también en $\mathcal{N}(B)$, siendo B el operador inducido por b . Además, dado la sobreyectividad del operador gradiente, existe un $\hat{\mathbf{v}} = \nabla q$ y por la desigualdad de Poincare, se garantiza la condición inf-sup.

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in Q \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in Q \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q}{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}} \geq \frac{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla q}{\|\hat{\mathbf{v}}\|_{0,\Omega}} = \frac{\|\nabla q\|_{0,\Omega}^2}{\|\nabla q\|_{0,\Omega}} \geq C \|q\|_{1,\Omega}. \quad (1.3.4)$$

Por lo anterior, se concluye que la formulación variacional (1.3.3) tiene solución única.

1.3.3. Formulación discreta

Al igual como se trabajó en la sección anterior, la discretización para la ecuación de Darcy, teniendo en cuenta la formulación variacional (1.3.3) se trabajará para el caso bidimensional. Sea \mathcal{T}_h una partición regular de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ donde los elementos K son triángulos. Además $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ y $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$. Sea $\mathcal{N} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ el conjunto de todos los nodos en \mathcal{T}_h . Sean Q_h y H_h subespacios finito dimensionales de Q y H respectivamente, donde

$$\begin{aligned} Q_h &= \{\mathbf{v} \in Q : \mathbf{v}|_K \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \\ H_h &= \{q \in H : q|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Además, se definen los siguientes espacios auxiliares

$$\begin{aligned} H_{hp} &= \{q_h \in H_h : q_h = p_D \text{ en } \Gamma_D\} \\ H_{h0} &= H_h \cap H_{0D}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Teniendo en cuenta los espacios anteriores, la formulación variacional Mixta discreta para (1.3.3) se puede escribir como:

$$(FVDM) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \times H_{hp} \text{ tal que} & : \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in H_{h0}. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h && \text{Forma bilineal } Q_h \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\mathbf{v}_h, q_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h && \text{Forma bilineal } Q_h \times H_{h0} \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(\mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h && \text{Funcional lineal } Q_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(q_h) &= \langle g, q_h \rangle_{\Gamma_N} && \text{Funcional lineal } H_{h0} \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.3.4. Existencia y unicidad (problema discreto)

Teniendo en cuenta un argumento similar a lo expuesto en el comentario 1.3.1, sin pérdida de generalidad se estudiará el caso $p_h \in H_{h0}$. Para probar la existencia y unicidad del problema discreto (1.3.7), hacemos algo similar a lo hecho para su respectivo problema continuo. Por un lado se tiene que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{u}_h \geq \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{u}_h \geq C \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2, \quad (1.3.8)$$

por lo que a es coerciva en Q_h y por tanto también para todo $\mathbf{u}_h \in \mathcal{N}(B_h)$, con $B_h : Q \rightarrow H_{h0}$ operador inducido por la forma bilineal b .

Por otro lado, es claro que si $q_h \in H_{h0}$, entonces ∇q_h es una función constante por partes. Así, si en particular $\mathbf{v}_h^* = \nabla q_h \in Q_h$, se tiene que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}} \geq \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h^* \cdot \nabla q_h}{\|\mathbf{v}_h^*\|_{0,\Omega}} = \frac{\|\nabla q_h\|_{0,\Omega}^2}{\|\nabla q_h\|_{0,\Omega}} \geq \|\nabla q_h\|_{0,\Omega}, \quad (1.3.9)$$

por lo que problema (1.3.7) satisface una condición inf-sup discreta y, por lo tanto, podemos garantizar que existe solución y es única.

1.3.5. Análisis de Error

El análisis de error para la ecuación de Darcy utilizando el método de elementos finitos mixtos, teniendo en cuenta las formulaciones descritas en esta sección, se sigue de forma similar al análisis de error hecho en la sección anterior, solo que aquí, los espacios de la solución son diferentes. En ese orden de ideas, se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_Q + \|p - p_h\|_H \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_Q + \|p - q_h\|_H), \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q, \text{ y } \forall q_h \in H_{h0}. \quad (1.3.10)$$

De [26] se tiene que existe un interpolador $\bar{\Pi}_h : [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow Q_h$ tal que

$$\|\mathbf{v} - \bar{\Pi}_h(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq Ch|\mathbf{v}|_{1,\Omega},$$

además, por [24], se tiene que el interpolador global de Lagrange $\hat{\Pi}_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow H_h$ es tal que

$$\|q - \hat{\Pi}_h(q)\|_{1,\Omega} \leq Ch|q|_{2,\Omega} \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (1.3.11)$$

Por lo que al reemplazar los resultados anteriores en (1.3.10), se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_Q + \|p - p_h\|_H \leq Ch (|\mathbf{v}|_{1,\Omega} + |q|_{2,\Omega}). \quad (1.3.12)$$

1.3.6. Implementación

Sea $\{\Psi_j\}_{j=1}^{2L}$ con L el número de triángulos, una base para Q_h y además sea $\{\varphi_L\}_{l=1}^N$, con N el número de nodos, una base para H_h , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{i=1}^{2L} \alpha_i \Psi_i, \\ p_h &= \sum_{i=1}^N \eta_i \varphi_i, \end{aligned}$$

luego las ecuaciones de (1.3.7) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2L} \alpha_i a(\Psi_i, \Psi_j) + \sum_{i=1}^N \eta_i b(\varphi_i, \Psi_j) &= F(\Psi_j) \\ \sum_{i=1}^{2L} \eta_i b(\Psi_i, \varphi_l) &= G(\varphi_l). \end{aligned}$$

Matricialmente lo anterior se puede ver como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_F \\ \mathbf{b}_G \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2L \times 2L}$, $A_{i,j} = a(\Psi_i, \Psi_j)$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times 2L}$, $B_{i,j} = b(\Psi_i, \varphi_l)$, $\mathbf{b}_F \in \mathbb{R}^{2L}$, $b_{Fj} = F(\Psi_j)$, $\mathbf{b}_G \in \mathbb{R}^N$, $b_{Gl} = G(\varphi_l)$.

Las diferentes bases para los espacios de trabajo están dadas por:

$$\{\Psi_j\}_{j=1}^{2L} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{para } K_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{para } K_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{para } K_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{para } K_2}, \dots, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{para } K_L}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{para } K_L} \right\}$$

Por otro lado, se tiene que $\{\varphi_l\}_{l=1}^N = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ con φ_l funciones techo de primer grado, es decir

$$\varphi_l(X_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = m \\ 0 & \text{si } l \neq m \end{cases} \quad (1.3.13)$$

donde

$$\varphi_l(X) = a_l x + b_l y + c_l.$$

Considerando el desarrollo anterior, entonces

$$\begin{aligned} a(\Psi_i, \Psi_j) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \Psi_i \cdot \Psi_j = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{K}^{-1} \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K \\ b(\Psi_i, \varphi_l) &= \int_{\Omega} \Psi_i \cdot \nabla \varphi_l = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Psi_i^K \cdot \nabla \varphi_l^K \\ F(\Psi_j) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_j = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_j^K \\ G(\varphi_l) &= \int_{\Gamma_N} g \varphi_l = \sum_{E \in \Gamma_N} \int_E g \varphi_l^K, \end{aligned}$$

donde Ψ_j^K y φ_l^K son las funciones asociadas a cada triángulo K .

Sea A^K la matriz local asociada a la forma bilineal a cuyas componentes están dadas por

$$A_{i,j}^K = \frac{\mu}{k\rho} \int_K \Psi_i^K \Psi_j^K,$$

por tanto

$$\mathbf{A}^K = \frac{\mu}{k\rho} \begin{bmatrix} \int_K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_K \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \int_K \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_K \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

entonces

$$\mathbf{A}^K = \frac{\mu}{k\rho} |K| \mathbf{I}. \quad (1.3.14)$$

Por su parte, sea \mathbf{B}^K la matriz local asociada a la forma bilineal b , cuyas componentes están dadas por

$$B_{i,j}^K = \int_K \Psi_i^K \cdot \nabla \varphi_l^K,$$

por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^K &= \begin{bmatrix} \int_K \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_K \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_K \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \int_K \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_K \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_K \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}^K &= |K| \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}}_{Grad}, \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

donde la matriz *Grad* puede obtenerse a partir de (1.3.13) y se obtiene

$$Grad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Por otro lado, las componentes del vector F , usando la cuadratura de integración sobre triángulos de puntos medios pueden expresarse como:

$$F^K = \begin{bmatrix} \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_1^K \\ \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_2^K \end{bmatrix} = \frac{|K|}{3} (\mathbf{f}(P_{m1}) + \mathbf{f}(P_{m2}) + \mathbf{f}(P_{m3})). \quad (1.3.16)$$

Por su parte

$$G^K = \begin{bmatrix} \int_E g \varphi_1^K \\ \int_E g \varphi_2^K \end{bmatrix} = \frac{|E|}{6} \begin{bmatrix} g(P_1) + 2g(P_m) \\ g(P_2) + 2g(P_m) \end{bmatrix}. \quad (1.3.17)$$

Comentario 1.3.2. Para la formulación variacional utilizada en esta sección, las condiciones de frontera Neumann aparecen de forma natural. Las condiciones de frontera Dirichlet son impuestas de manera fuerte en el programa principal en Matlab usando un método de condensación de datos, ver [4].

1.4. El método FEM para la ecuación de Darcy en 3D

En esta sección se implementará el método de elementos finitos para estudiar la ecuación de Darcy en un dominio tridimensional. Para tal tarea, se utilizará la formulación variacional (1.3.3), por lo que el desarrollo hecho aquí, es una extensión de lo hecho en la sección anterior. Los resultados del análisis de existencia y unidad de la solución obtenidos anteriormente, también son válidos para este caso.

1.4.1. Formulación discreta

Sea \mathcal{T}_h una partición regular del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera poligonal Γ tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, donde los elementos T son tetraedros. Además, $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ y $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$. Sea $\mathcal{N} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ el conjunto de todos los nodos en \mathcal{T}_h . Además, ahora se redefinen a Q_h y H_h como subespacios finito dimensionales de Q y H como

$$\begin{aligned} Q_h &= \{\mathbf{v} \in Q : \mathbf{v}|_T \in [\mathbb{P}_0(T)]^3 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ H_h &= \{q \in H : q|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

Al igual que en la sección anterior, se definen los siguientes espacios auxiliares

$$\begin{aligned} H_{hp} &= \{q_h \in H_h : q_h = p_D \text{ en } \Gamma_D\} \\ H_{h0} &= \{q_h \in H_h : q_h = 0 \text{ en } \Gamma_D\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los espacios anteriores, la formulación variacional Mixta discreta se escribe igual como en la sección anterior:

$$(FVDM) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \times H_{hp} \text{ tal que} & : \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in H_{h0}. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Comentario 1.4.1. Las formas bilineales y los respectivos funcionales en (1.4.1), se describen de forma similar que en (1.3.7).

1.4.2. Implementación

Sea $\{\Psi_j\}_{j=1}^{3L}$ con L número de tetraedros en \mathcal{T}_h , una base para Q_h , además sea $\{\varphi_l\}_{l=1}^N$ donde N es número de nodos en \mathcal{T}_h , una base para H_h , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{i=1}^{3L} \alpha_i \Psi_i, \\ p_h &= \sum_{i=1}^N \eta_i \varphi_i. \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (1.4.1) se llega al siguiente sistema matricial como se hizo anteriormente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_F \\ \mathbf{b}_G \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3L \times 3L}$, $A_{i,j} = a(\Psi_i, \Psi_j)$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times 3L}$, $B_{i,j} = b(\Psi_i, \varphi_l)$, $\mathbf{b}_F \in \mathbb{R}^{3L}$, $b_{Fj} = F(\Psi_j)$, $\mathbf{b}_G \in \mathbb{R}^N$, $b_{Gl} = G(\varphi_l)$.

La base para Q_h está dada por

$$\{\Psi_j\}_{j=1}^{3L} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{para } T_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{para } T_2}, \dots, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{para } T_L} \right\}.$$

Por otro lado, la base para H_h está dada en este caso por $\{\varphi_l\}_{l=1}^N = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ con φ_l funciones techo de primer grado, es decir

$$\varphi_l(X_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = m \\ 0 & \text{si } l \neq m \end{cases}$$

donde

$$\varphi_l(X) = a_l x + b_l y + c_l z + d_l.$$

De forma análoga a lo hecho en la sección anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} a(\Psi_i, \Psi_j) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \Psi_i \cdot \Psi_j = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\mu}{k\rho} \int_T \Psi_i^T \cdot \Psi_j^T \\ b(\Psi_i, \varphi_l) &= \int_{\Omega} \Psi_i \cdot \nabla \varphi_l = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Psi_i^T \cdot \nabla \varphi_l^T \\ F(\Psi_j) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_j = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \Psi_j^T \\ G(\varphi_l) &= \int_{\Gamma_N} g \varphi_l = \sum_{K \subset \Gamma_N} \int_K g \varphi_l^T, \end{aligned}$$

donde Ψ_j^T y φ_l^T son las funciones básicas para cada tetraedro T .

Las componentes de la matriz \mathbf{A}^T están dadas por:

$$A_{i,j}^T = \frac{\mu}{k\rho} \int_T \Psi_i^T \Psi_j^T,$$

por tanto

$$\mathbf{A}^T = \frac{\mu}{k\rho} \begin{bmatrix} \int_T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \int_T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \int_T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

por lo que integrando cada componente de \mathbf{A}^T se tiene que

$$\mathbf{A}^T = \frac{\mu}{k\rho} |T| \mathbf{I}_{3 \times 3}.$$

Por su parte las componentes de la matriz \mathbf{B}^T son

$$B_{i,j}^T = \int_T \Psi_i^T \cdot \nabla \varphi_l^T,$$

por tanto

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \int_T \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \int_T \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \int_T \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \int_T \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Integrando cada componente de \mathbf{B}^T , se tiene

$$\mathbf{B}^T = |T| \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}}_{Grad},$$

donde

$$Grad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Por su parte, los vectores F y G que conforman el lado derecho del sistema lineal, se calculan como

$$F^T = \begin{bmatrix} \int_T \mathbf{f} \cdot \Psi_1^T \\ \int_T \mathbf{f} \cdot \Psi_2^T \\ \int_T \mathbf{f} \cdot \Psi_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_T f_1 \\ \int_T f_2 \\ \int_T f_3 \end{bmatrix}.$$

Integrando cada componente de F^T usando una cuadratura de un punto (centroide) [48] se tiene que

$$F^T = |T| \mathbf{f}(\text{centroide}).$$

Por otro lado, usando la cuadratura de integración baricéntrica, para G^T se tiene

$$G^T = \begin{bmatrix} \int_K g\varphi_1 \\ \int_K g\varphi_2 \\ \int_K g\varphi_3 \end{bmatrix} = |K| \begin{bmatrix} g(\text{bar})\varphi_1(\text{bar}) \\ g(\text{bar})\varphi_2(\text{bar}) \\ g(\text{bar})\varphi_3(\text{bar}) \end{bmatrix} = \frac{|K|}{3} \begin{bmatrix} g(\text{bar}) \\ g(\text{bar}) \\ g(\text{bar}) \end{bmatrix}$$

Comentario 1.4.2. Para la formulación variacional utilizada en esta sección, al igual que en la pasada, las condiciones de frontera Neumann aparecen de forma natural. Las condiciones de frontera Dirichlet son impuestas de manera fuerte en el programa principal en Matlab usando un método de condensación de datos.

1.5. Experimentos Numéricos

En la presente sección se muestran algunos resultados numéricos obtenidos al solucionar la ecuación de Darcy, implementando el método de elementos finitos mixtos, utilizando las diferentes formas variacionales expuestas anteriormente para dos problemas particulares. Por simplicidad se tomará a $k = 1$.

1.5.1. Ejemplo 1

Considere el siguiente problema no homogéneo:

Sea $\Omega := [-1, 1] \times [-1, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial\Omega : y = \pm 1\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. El término de fuerzas de volumen está definido como:

$$\mathbf{f}(x, y) = e^{xy} \begin{bmatrix} x + y + xy^2 \\ x - y + x^2y \end{bmatrix},$$

el campo de presión exacta está dada por $p = xye^{xy}$ y la función g es obtenida al operar la componente normal de Γ_N con la solución exacta de la velocidad de flujo $\mathbf{u} = [xe^{xy}, -ye^{xy}]^t$. A continuación se muestran los resultados obtenidos al solucionar el problema planteado usando la formulación variacional mixta (1.2.14), con sus respectivos espacios de aproximación como se explicó en la primera sección de este capítulo.

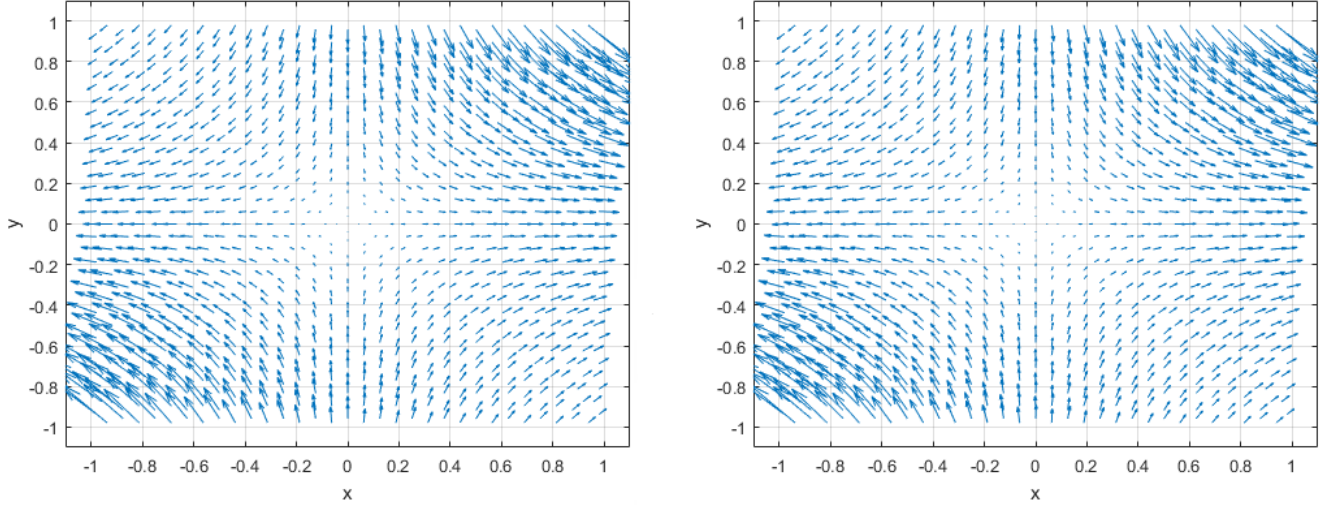


Figura 1.5.1: Campo de velocidad Exacto (Izq) vs Aproximado (Der)
MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in RT_0(K) \times \mathbb{P}_0(K)$
Malla: 1024 Elementos, $h = 0,125$

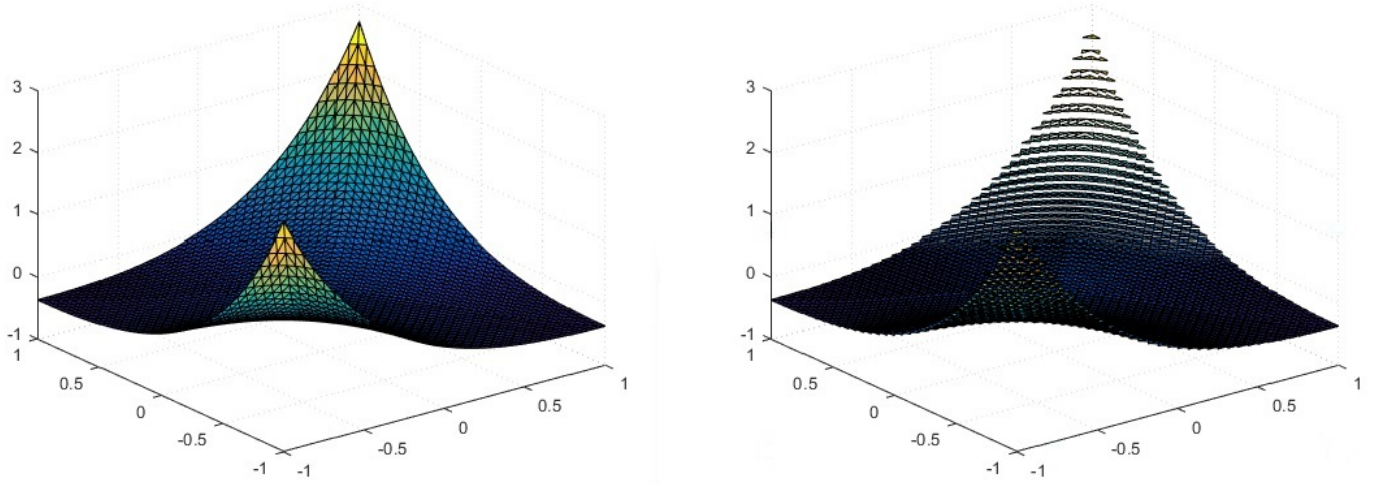


Figura 1.5.2: presión Exacta p (Izq) vs Aproximada p_h (Der)
MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in RT_0(K) \times \mathbb{P}_0(K)$
Malla: 4096 Elementos, $h = 0,0625$

En la figura 1.5.1 se muestra la comparación entre el campo de velocidades exacto y aproximado para $h = 0,125$, mientras que en la figura (1.5.2) se compara la solución exacta y la aproximada de la presión, en una malla con $h = 0,0625$. A continuación se muestra la tabla de errores para la velocidad \mathbf{u} y la presión p en las normas respectivas según su espacio de aproximación, mostrando además el orden de convergencia, calculado como:

$$Orden_i = \frac{\log\left(\frac{e_{hi}}{e_{hi+1}}\right)}{\log\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)}, \quad (1.5.1)$$

donde e_{hi} es la norma del error en algún espacio, e i representa el nivel o malla que se está operando.

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H(\text{div};\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden
16	1	0.8118	*	0.4784	*
64	0.5	0.4463	0.8631	0.2489	0.9426
256	0.25	0.2289	0.9634	0.1251	0.9919
1024	0.125	0.1152	0.9905	0.0626	0.9987
4096	0.0625	0.0577	0.9976	0.0313	0.9997
16384	0.0313	0.0289	0.9994	0.0157	0.9999
65536	0.0156	0.0144	0.9998	0.0078	1.0000

Tabla 1.5.1: Errores de la solución aproximada MFEM $(\mathbf{u}, p) \in H(\text{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ (Ejemplo 1)

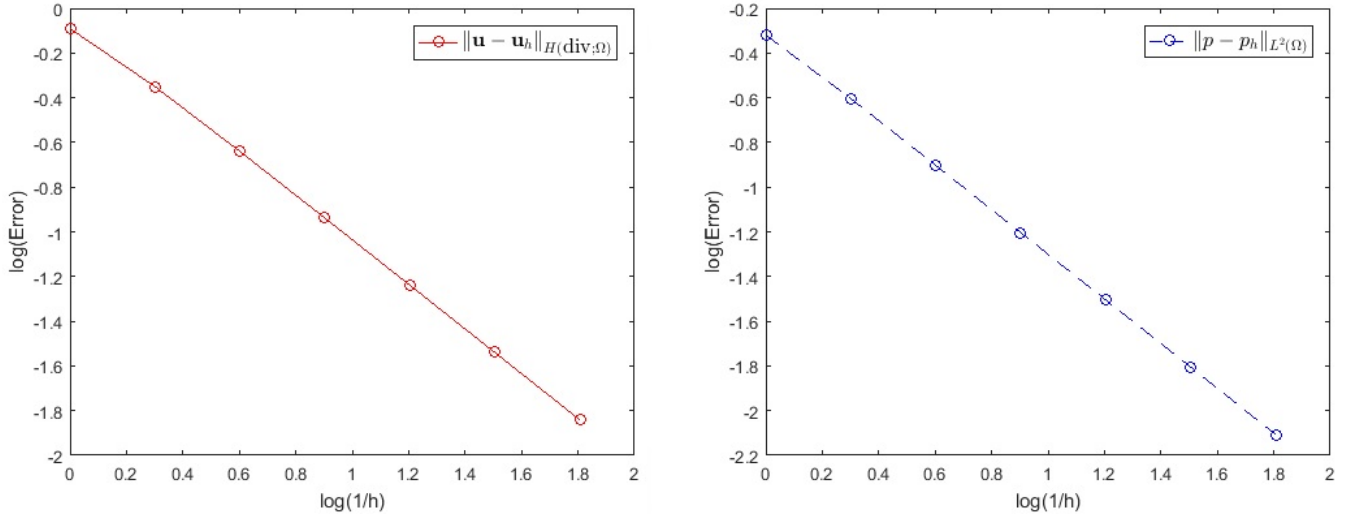


Figura 1.5.3: Convergencia para $\mathbf{u} \in H(\text{div};\Omega)$ y $p \in L^2(\Omega)$

Comentario 1.5.1. Debido a que $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ en Ω , entonces $\|\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2} = \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div};\Omega)}$, por tal motivo la norma de \mathbf{u} en $[L^2(\Omega)]^2$, no se muestra en la tabla 1.5.1.

La figura 1.5.3 presenta gráficamente el comportamiento de los errores mostrados anteriormente a escala logarítmica. Muestra que a medida que la malla se vuelve mas fina, es decir que el tamaño de h disminuye, los errores en las normas respectivas también disminuyen.

Por otro lado, resolviendo el problema propuesto empleando la formulación variacional discreta (1.3.7) se tienen lo siguiente:

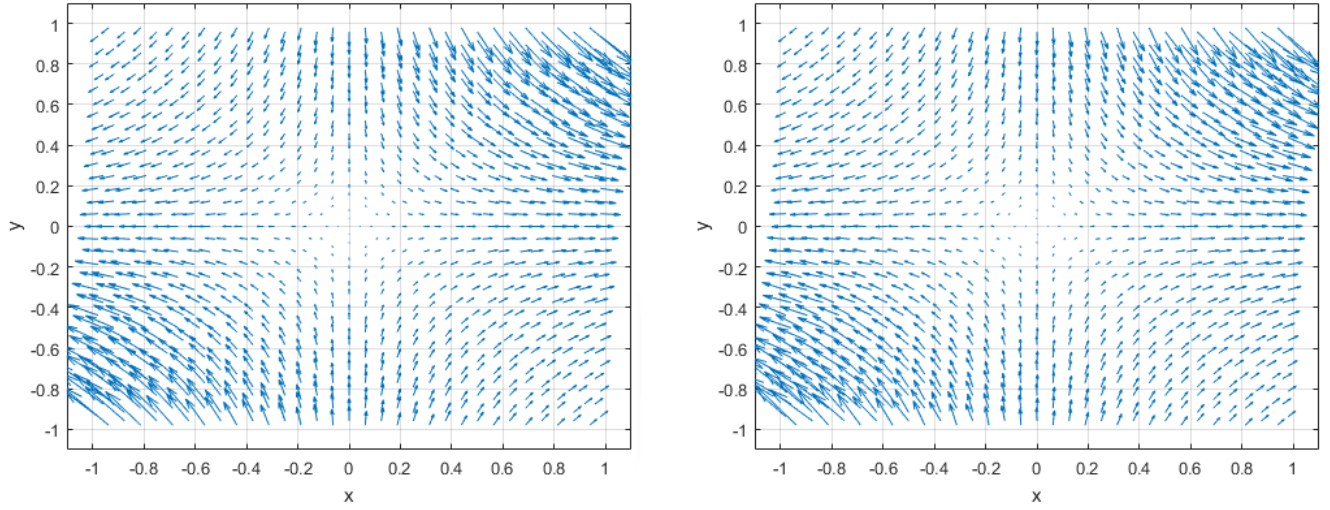


Figura 1.5.4: Campo de velocidad Exacto (Izq) vs Aproximado (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 1024 Elementos, $h = 0,125$

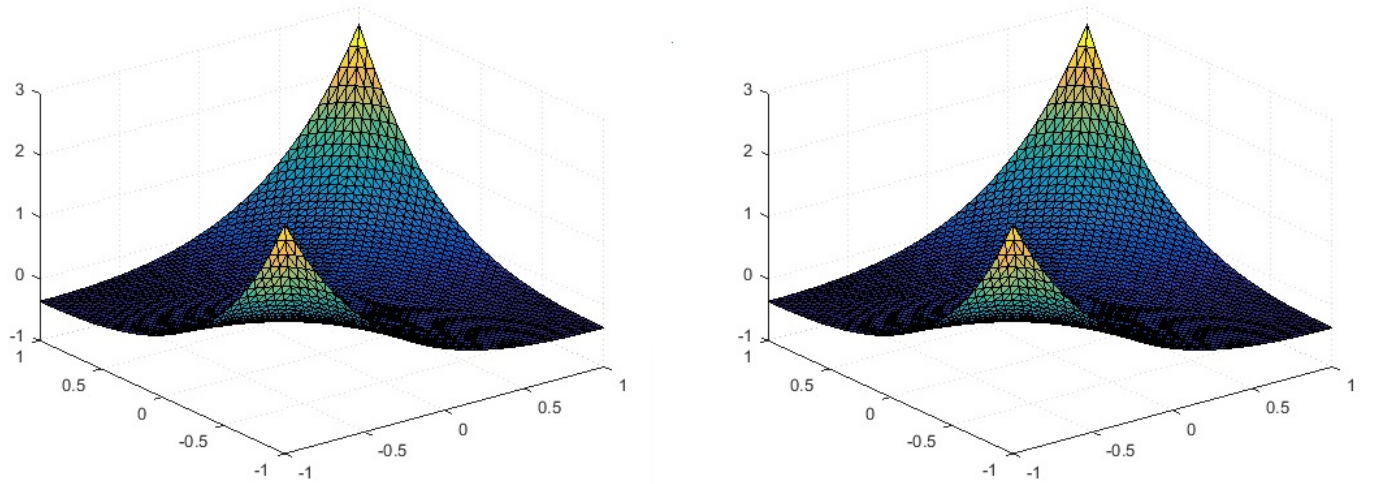


Figura 1.5.5: Presión Exacta p (Izq) vs Aproximada p_h (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 4096 Elementos, $h = 0,0625$

A continuación se muestra la tabla de error y orden de convergencia para la velocidad \mathbf{u} y la presión p .

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{[L^2(\Omega)]^2}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
16	1	1.2224	*	0.6686	*	1.5978	*
64	0.5	0.6373	0.9397	0.1696	1.9788	0.8371	0.9327
256	0.25	0.3233	0.9789	0.0424	2.0010	0.4285	0.9659
1024	0.125	0.1625	0.9928	0.0106	2.0004	0.2159	0.9892
4096	0.0625	0.0814	0.9979	0.0026	2.0001	0.1082	0.9971
16384	0.0312	0.0407	0.9994	0.0007	2.0000	0.0541	0.9992
65536	0.0156	0.0203	0.9999	0.0002	2.0000	0.0271	0.9998

Tabla 1.5.2: Errores de la solución aproximada MFEM $(\mathbf{u}, p) \in [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ (Ejemplo 1)

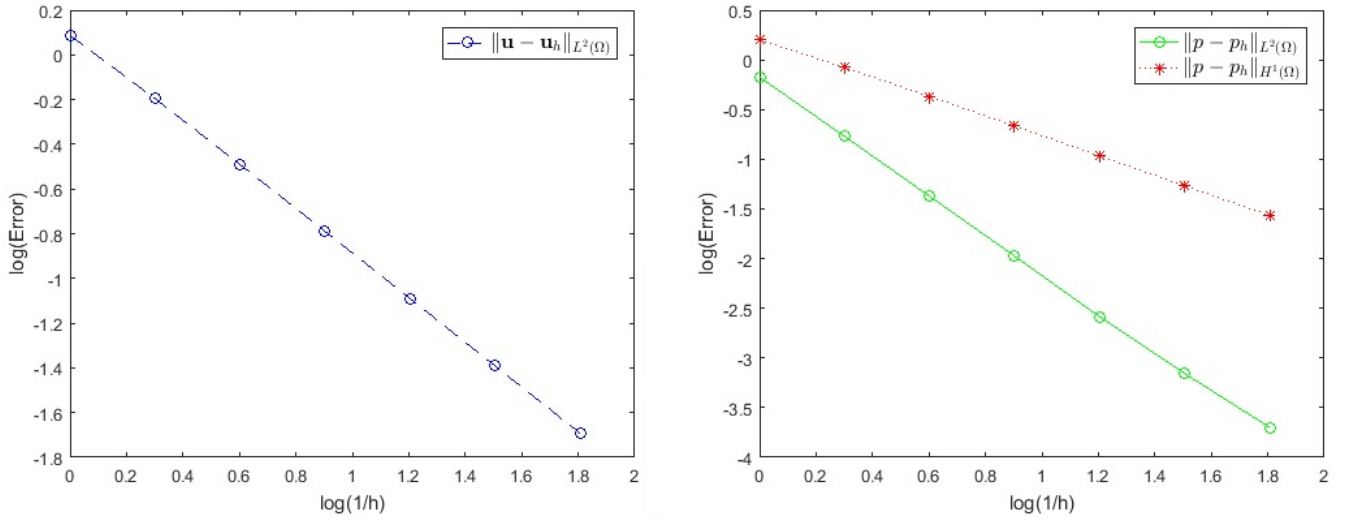


Figura 1.5.6: Convergencia para $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $p \in H^1(\Omega)$

La tabla 1.5.2, así como la figura 1.5.6, claramente evidencian que a medida que se van refinando las mallas y valor de h decrece, los errores en los diferentes espacios disminuyen.

1.5.2. Ejemplo 2

Considere el siguiente problema no homogéneo:

Sea Ω la región en el plano descrita en la figura 1.5.7, donde el término de fuerzas de volumen está dado por

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} y^2 + 2xy + x^2y \\ x^2 + 2xy - xy^2 \end{bmatrix},$$

el campo de presión exacta está dada por $p = x^2y + xy^2$ y la función g es obtenida al operar la componente normal de Γ_N con el campo de velocidad exacto dado por $\mathbf{u} = [x^2y, -xy^2]^t$.

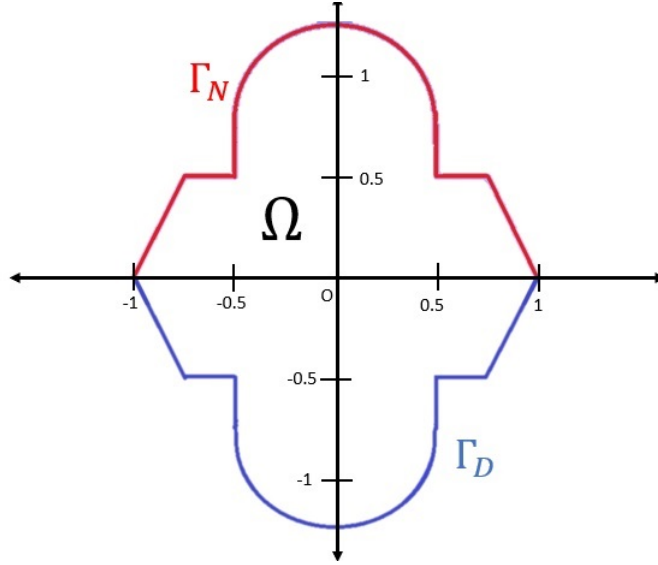


Figura 1.5.7: Dominio de trabajo Ω (Ejemplo 2)

A continuación se muestran los resultados obtenidos al solucionar el problema planteado usando la formulación variacional mixta (1.2.14), con sus respectivos espacios de aproximación como se explicó en la primera sección de este capítulo.

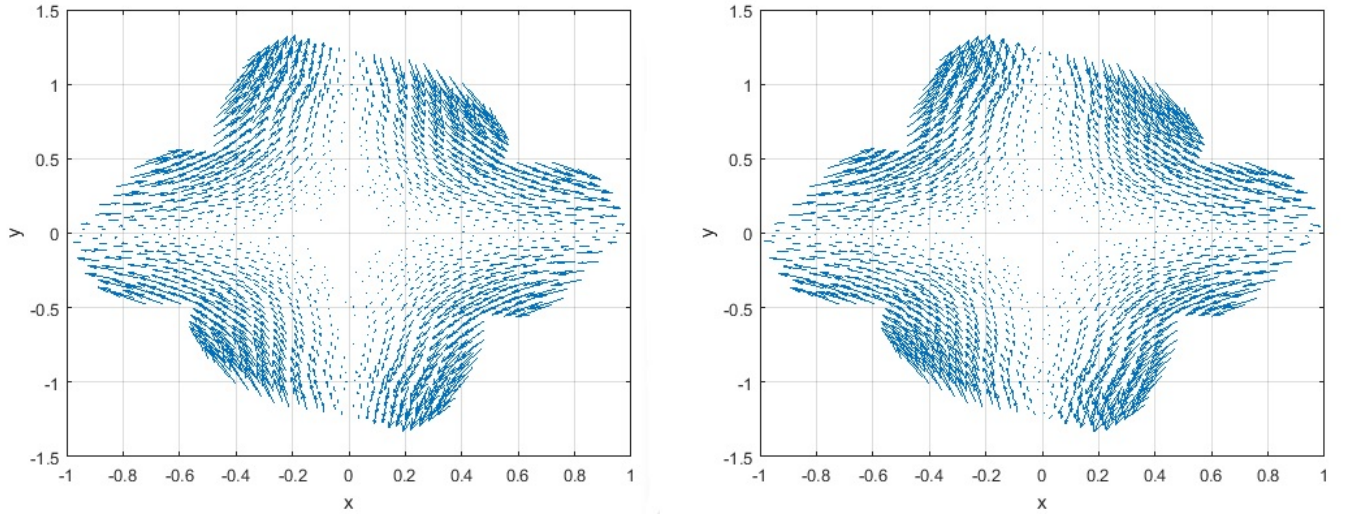


Figura 1.5.8: Campo de velocidad Exacto (Izq) vs Aproximado (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in RT_0(K) \times \mathbb{P}_0(K)$

Malla: 1728 Elementos, $h = 0,1398$

A continuación se muestra la tabla de errores con el respectivo orden de convergencia para la velocidad \mathbf{u} y la presión p en los respectivos espacios de aproximación.

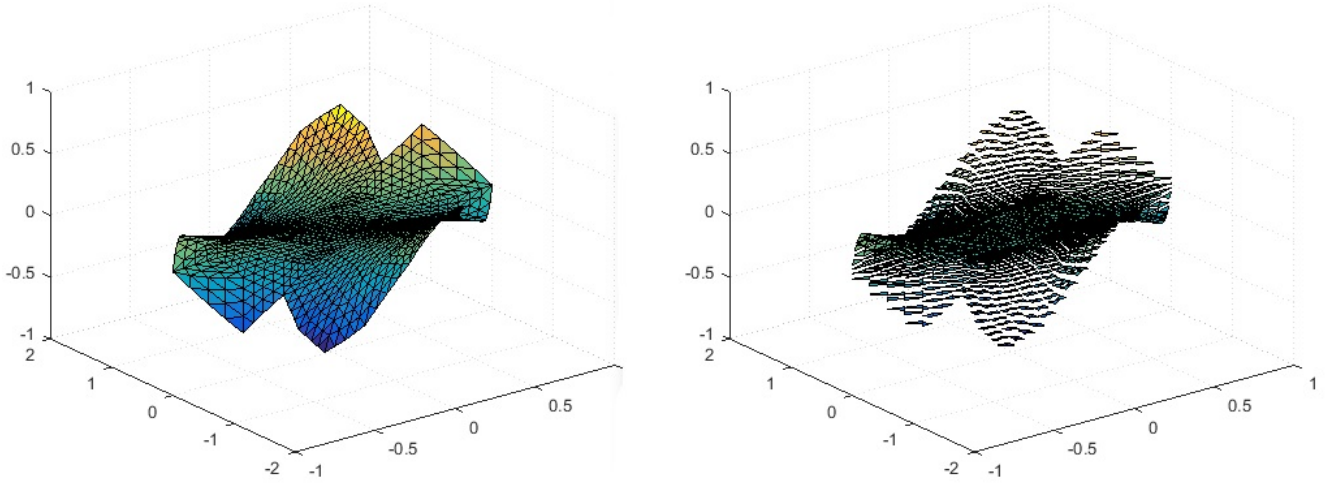


Figura 1.5.9: Presión Exacta p (Izq) vs Aproximada p_h (Der)
MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in RT_0(K) \times \mathbb{P}_0(K)$
Malla: 1728 Elementos, $h = 0,1398$

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H(\text{div}; \Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden
108	0.5590	0.0998	*	0.0721	*
432	0.2795	0.0491	1.0222	0.0362	0.9938
1728	0.1398	0.0246	0.9993	0.0181	0.9981
6912	0.0699	0.0123	0.9989	0.0091	0.9995
27648	0.0349	0.0061	0.9996	0.0045	0.9999
110592	0.0175	0.0031	0.9999	0.0023	1.0000

Tabla 1.5.3: Errores de la solución aproximada
MFEM $(\mathbf{u}, p) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ (Ejemplo 2)

Tanto las gráficas del campo de velocidades (figura 1.5.8) y de presión (figura 1.5.9) así como los resultados mostrados en la tabla 1.5.3, dan muestra de que la solución aproximada es muy buena a pesar de que el dominio de trabajo presenta algunas variaciones con respecto al típico (rectángulos). En consecuencia de lo anterior, también es evidente que a medida que se refinan las mallas, los errores en las distintas normas disminuyen, aseverando el grado de precisión de la solución aproximada.

A continuación se muestran los resultados obtenidos, al aproximar la solución del problema de valores en la frontera planteado, implementando la formulación variacional discreta (1.3.7).

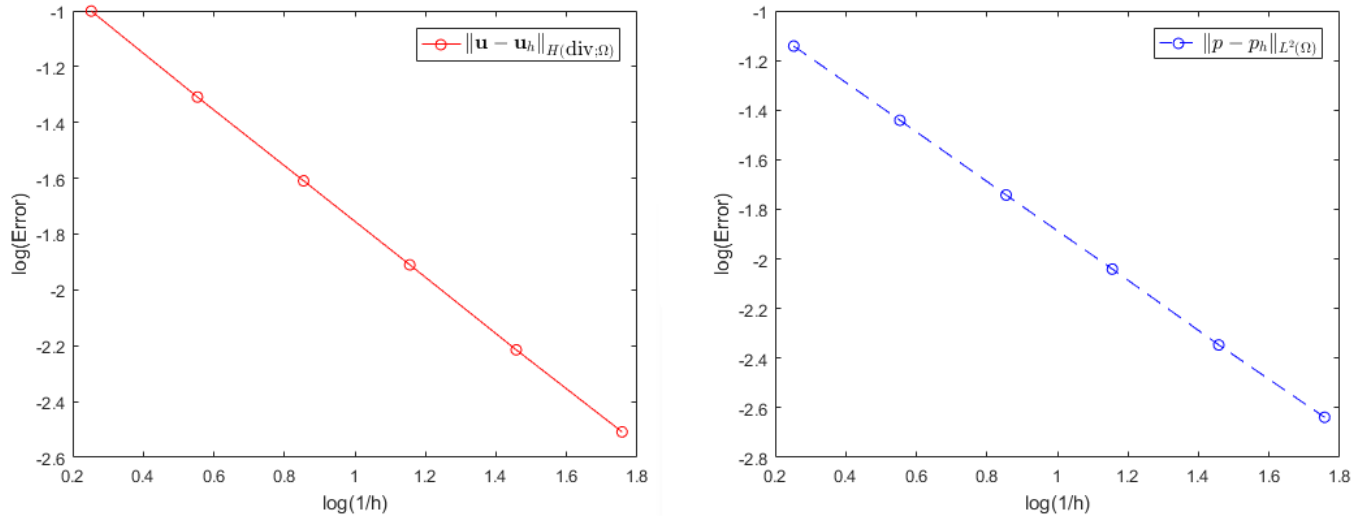


Figura 1.5.10: Convergencia para $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $p \in H^1(\Omega)$

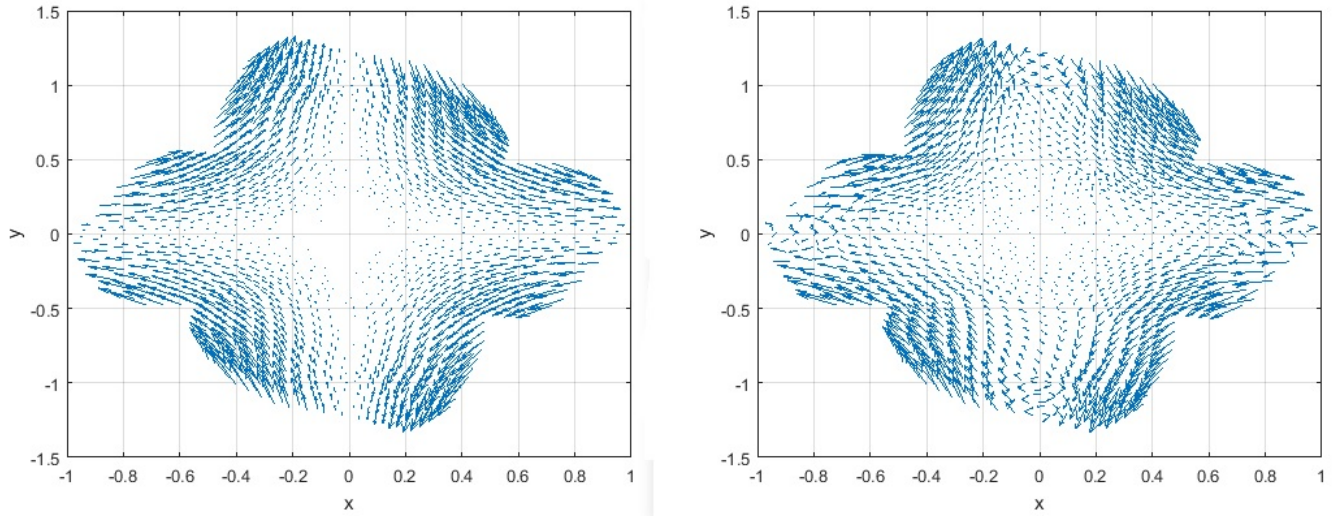


Figura 1.5.11: Campo de velocidad Exacto (Izq) vs Aproximado (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 1728 Elementos, $h = 0,1398$

A continuación se muestra la tabla de errores con el respectivo orden de convergencia para la velocidad \mathbf{u} y la presión p en los respectivos espacios de aproximación.

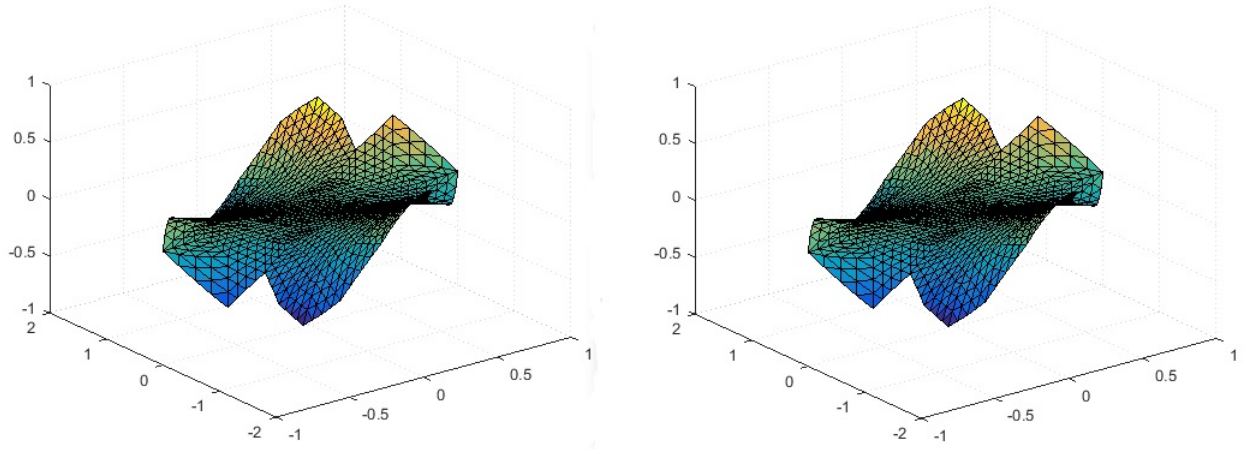


Figura 1.5.12: Presión Exacta p (Izq) vs Aproximada p_h (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 1728 Elementos, $h = 0,1398$

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{[L^2(\Omega)]^2}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
108	0.5590	0.2694	*	0.0335	*	0.3658	*
432	0.2795	0.1391	0.9534	0.0086	1.9615	0.1865	0.9721
1728	0.1398	0.0704	0.9826	0.0022	1.9730	0.0939	0.9898
6912	0.0699	0.0353	0.9944	0.0006	1.9896	0.0471	0.9967
27648	0.0349	0.0177	0.9983	0.0001	1.9964	0.0235	0.9990
110592	0.0175	0.0088	0.9995	0.0000	1.9987	0.0118	0.9997

Tabla 1.5.4: Errores de la solución aproximada

MFEM $(\mathbf{u}, p) \in [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ (Ejemplo 2)

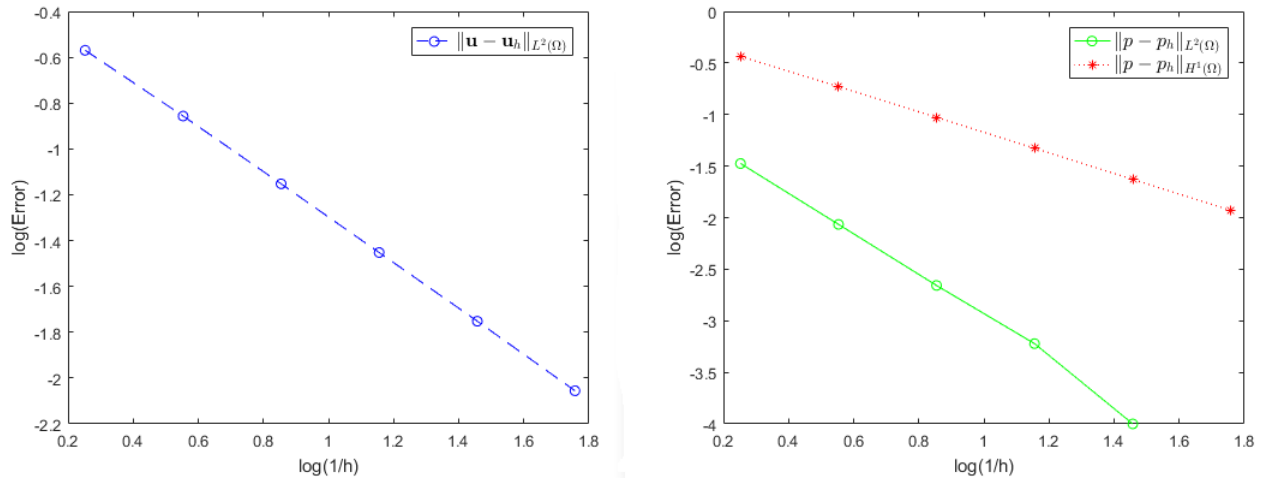


Figura 1.5.13: Convergencia para $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $p \in H^1(\Omega)$

Observación

Hemos estudiado dos ejemplos, en los cuales se aproxima la solución para el problema de Darcy, utilizando las dos formulaciones variacionales estudiadas a lo largo del capítulo. Las aproximaciones encontradas tanto para la velocidad \mathbf{u} y la presión p son muy buenas, ya que en las respectivas tablas de error, se evidencia que dichos errores en las distintas normas son muy pequeños, aparte que las figuras comparativas así lo muestran. Sin embargo, es menester hacer algunas comparaciones.

Es de notar, que debido a la condición de incompresibilidad $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ en Ω , la norma de \mathbf{u} en $[L^2(\Omega)]^2$ y en $H(\text{div}; \Omega)$ son iguales, como ya se ha mencionado anteriormente. Teniendo en cuenta los resultados generales de las tablas 1.5.1, 1.5.3, 1.5.2 y 1.5.4, claramente se observa que aunque los errores para la velocidad \mathbf{u} obtenidos con la primera formulación son más pequeños en comparación con los encontrados en la segunda formulación por malla, el orden de convergencia se alcanza simultáneamente. Por otro lado, los errores para la presión p en la norma $L^2(\Omega)$ en la segunda formulación, son mucho mas pequeños que en la primera y el respectivo orden de convergencia también se alcanza mucho más rápido, lo cual es lo esperado dado el orden asignado.

Otra comparación que es conveniente mencionar, tiene que ver con la regularidad que se le pide a las variables \mathbf{u} y p . En la primera formulación a la velocidad se le pide que sea diferenciable en cada una de sus componentes, lo cual implica que los polinomios de aproximación para \mathbf{u} tienen que ser de primer grado o superior, que en contraste con la segunda formulación, ésta se puede aproximar por polinomios constantes. Caso contrario ocurre con la presión, mientras en la segunda formulación se pide que sea diferenciable, en la primera formulación esta puede ser aproximada por polinomios constantes. Sin embargo, cabe recordar que en la segunda formulación se gana velocidad para la convergencia de la presión.

1.5.3. Ejemplo 3

Considere el siguiente problema no homogéneo:

Sea $\Omega := [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \partial\Omega : y = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \partial\Omega : z = 1\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. El término de fuerzas de volumen esta definido como:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} z(x^2 + y) \\ 1 + xz \\ x(y - z^2) \end{bmatrix},$$

el campo de presión exacta esta dada por $p = xyz$ y la función g es obtenida al operar la componente normal de Γ_N con la solución exacta de la velocidad de flujo

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 z \\ 1 \\ -xz^2 \end{bmatrix}.$$

A continuación se muestra un gráfico que compara el campo de velocidad exacto con el aproximado para $h=0.3953$ y la respectiva tabla de errores para el problema planteado seguido de las gráficas de convergencia para la velocidad \mathbf{u} y la presión p .

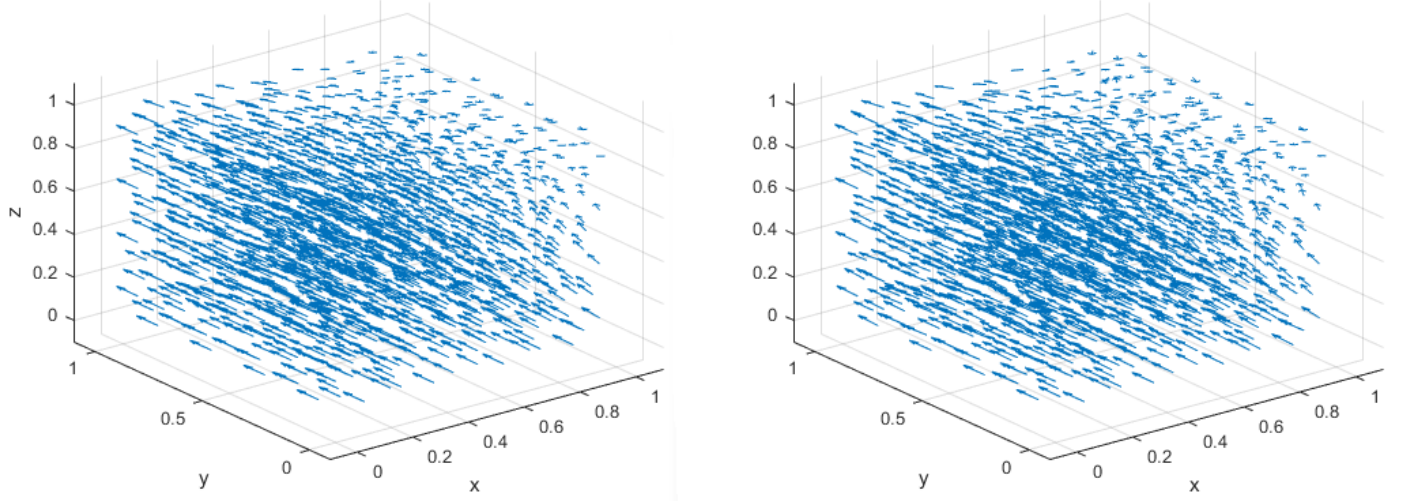


Figura 1.5.14: Campo de velocidad Exacto (Izq) vs Aproximado (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^3 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 1536 Elementos, $h = 0.3953$

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{[L^2(\Omega)]^3}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
24	1	0.1897	*	0.0111	*	0.1900	*
192	0.6124	0.1061	1.1846	0.0044	1.8833	0.1062	1.1863
1536	0.3953	0.0633	1.1805	0.0019	1.9492	0.0633	1.1814
12288	0.2652	0.0382	1.2667	0.0008	2.2789	0.0382	1.2673
98304	0.1712	0.0227	1.1883	0.0003	2.0886	0.0227	1.1886

Tabla 1.5.5: Errores de la solución aproximada

MFEM $(\mathbf{u}, p) \in [L^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$ Ejemplo 3

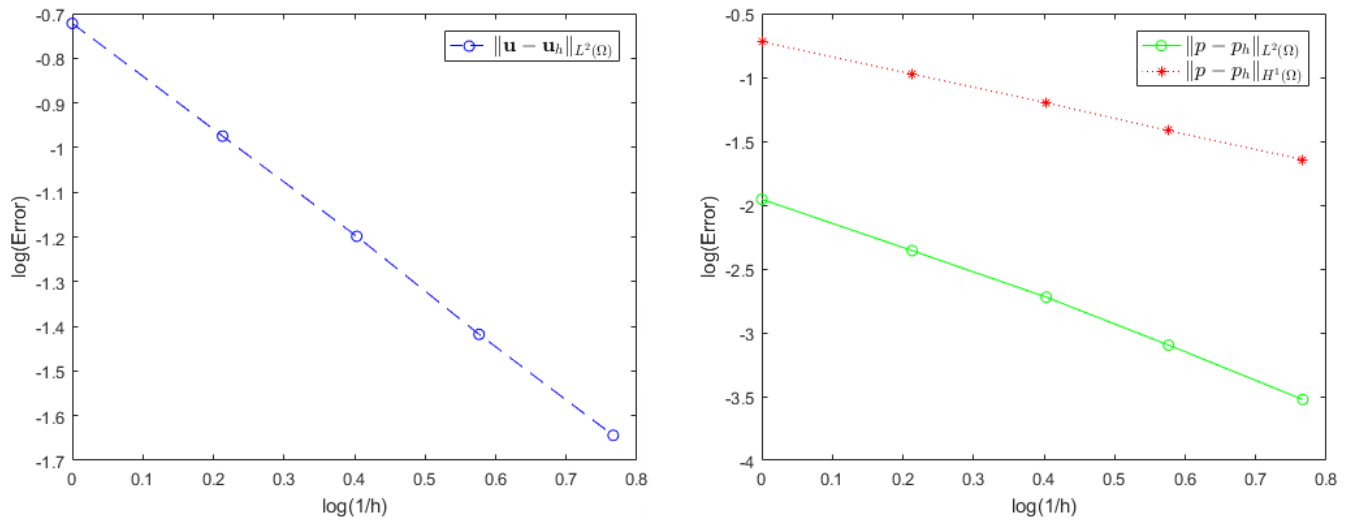


Figura 1.5.15: Convergencia del Error Darcy 3D

Capítulo 2

Darcy No Lineal

En este apartado, se estudiará la ley de Darcy y su solución numérica implementando el Método de Elementos Finitos de forma similar a lo hecho en el capítulo anterior. Sin embargo, acá se harán algunas consideraciones adicionales respecto a la permeabilidad del medio poroso y a la velocidad de flujo, que modificarán en parte el modelo ya planteado, volviéndolo no lineal.

2.1. Permeabiliadad dependiente de la Presión

2.1.1. Problema Continuo

Considere el siguiente sistema de ecuaciones para ley de Darcy desarrollado por Rajagopal [40]

$$(PF) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) & \text{tal que :} \\ \kappa(p)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{en } \Omega \\ p = p_D & \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{en } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde $\kappa(p)$ es una función Lipschitz continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} y acotada por dos cantidades positivas, es decir

$$\kappa_{min} \leq \kappa(\xi) \leq \kappa_{max} \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

$$|\kappa(\xi_1) - \kappa(\xi_2)| \leq L_\kappa |\xi_1 - \xi_2| \quad \text{con } L_\kappa > 0. \quad (2.1.3)$$

Siguiendo con la nomenclatura para los espacios introducidos en la segunda sección 1.3, se multiplican e integran sobre el dominio Ω , las dos primeras ecuaciones de (2.1.1) por una función $\mathbf{v} \in Q = [L^2(\Omega)]^n$ y por $q \in H_{0D}^1(\Omega)$ respectivamente. Siguiendo el procedimiento descrito en la segunda parte del capítulo anterior, se obtiene la siguiente formulación variacional: Dadas $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$,

$$(FVM) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) \in Q \times H_{pD}^1(\Omega) \text{ tal que :} \\ a_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) \quad \forall q \in H_{0D}^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.1.4)$$

donde

$$a_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \kappa(p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{Forma no bilineal } Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por su parte la forma bilineal b y los funcionales lineales F y G son igualmente definidos como en el capítulo anterior, por tanto son continuos. Además, para este caso, si $\kappa(p)$ satisface (2.1.2) se tiene que

$$\begin{aligned} |a_p(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \kappa_{max} \|\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^n} && \text{luego es continua en } Q \\ a_p(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq \kappa_{min} \|\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 && \text{luego es coerciva en } Q. \end{aligned}$$

Del capítulo anterior también se garantiza la condición inf-sup de la forma bilineal b . Con la teoría expuesta, se puede decir que (2.1.4) satisface las condiciones del teorema de Babuzka-Brezzi. Pero éste no garantiza la existencia y unicidad de la solución, debido a la no linealidad, con respecto a p , presente en a_p . A continuación se presentan las condiciones necesarias para que el problema de Darcy descrito en este capítulo tenga solución única. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, desde ahora supondremos que $p_D = 0$.

Teorema 2.1.1. *Supongamos que $\kappa(p)$ satisface las condiciones (2.1.2) y (2.1.3), entonces para cualesquiera $(\mathbf{f}, g) \in Q \times H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$ el problema (2.1.4) tiene solución $(\mathbf{u}, p) \in Q \times H_{0D}^1$. Además esta solución satisface*

$$\|\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)}).$$

La demostración del anterior teorema se hace mediante la aplicación del teorema de punto fijo de Brouwer [27] y está detallada en [7].

Una condición suficiente para garantizar la unicidad de la solución está dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Supongamos que la función κ satisface las condiciones (2.1.2) y (2.1.3). Si el problema (2.1.4) tiene solución (\mathbf{u}, p) tal que $\mathbf{u} \in [L^3(\Omega)]^n$ y satisface*

$$\frac{\kappa_{max} + \kappa_{min}}{\kappa_{min}} C(\Omega) L_\kappa \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} < 1, \quad (2.1.5)$$

entonces el problema (2.1.4) tiene solución única.

Demostración

Suponga que $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$ es otra solución de (2.1.4), entonces se tiene que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\kappa(p)\mathbf{u} - \kappa(\hat{p})\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla(p - \hat{p}) = 0, & \forall \mathbf{v} \in Q \\ \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla q = 0, & \forall q \in H_{0D}^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.1.6)$$

sumando y restando $\kappa(\hat{p})\mathbf{u}$ en la primera integral de (2.1.6)

$$\int_{\Omega} \kappa(\hat{p})(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\kappa(p) - \kappa(\hat{p}))\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla(p - \hat{p}) = 0, \quad (2.1.7)$$

sea $\mathbf{v} = (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})$

$$\int_{\Omega} \kappa(\hat{p})(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} (\kappa(p) - \kappa(\hat{p}))\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla(p - \hat{p}) = 0,$$

dado que p y \hat{p} son iguales en Γ_N , entonces por la segunda ecuación de (2.1.6) la tercera integral de arriba es cero. Por tanto

$$\left| \int_{\Omega} \kappa(\hat{p})|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}|^2 \right| = \left| \int_{\Omega} (\kappa(p) - \kappa(\hat{p}))\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \right|.$$

Tomando normas, teniendo en cuenta (2.1.3) y (2.1.2), y por la desigualdad de Holder generalizada, es claro que

$$\kappa_{min} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \leq L_{\kappa} \|\hat{p} - p\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega)]^n}.$$

Dado que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ [45], es decir

$$\|q\|_{L^6(\Omega)} \leq C(\Omega) |q|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.1.8)$$

se tiene

$$\kappa_{min} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq C(\Omega) L_{\kappa} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} |\hat{p} - p|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.1.9)$$

Por otro lado, si se hace $\mathbf{v} = \nabla(\hat{p} - p)$ en (2.1.7), tomando normas, teniendo en cuenta (2.1.3), (2.1.2), (2.1.8) y (2.1.5)

$$\begin{aligned} |\hat{p} - p|_{H^1(\Omega)} &\leq \kappa_{max} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n} + C(\Omega) L_{\kappa} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} |\hat{p} - p|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \kappa_{max} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \frac{\kappa_{min}}{\kappa_{max} + \kappa_{min}} |\hat{p} - p|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

así

$$\left(1 - \frac{\kappa_{min}}{\kappa_{max} + \kappa_{min}}\right) |\hat{p} - p|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_{max} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n}, \quad (2.1.10)$$

resolviendo queda

$$|\hat{p} - p|_{H^1(\Omega)} \leq (\kappa_{max} + \kappa_{min}) \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \quad (2.1.11)$$

Finalmente reemplazando (2.1.11) en (2.1.9)

$$\kappa_{min} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq (\kappa_{max} + \kappa_{min}) C(\Omega) L_{\kappa} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n},$$

luego por (2.1.5), (2.1.11) y la condición de frontera para p implican que $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ y $p = \hat{p}$ respectivamente. ■

Si la proposición anterior no se cumple, entonces la solución de (2.1.4) no es única y en dicho caso se habla de soluciones no singulares, estudiadas en [7, 26].

2.1.2. Problema discreto

Considerando nuevamente a Q_h y H_h espacios finitos dimensionales descritos en el capítulo anterior, se tiene que la formulación variacional discreta de (2.1.4), sin pérdida de generalidad para el caso $p = 0$ en Γ_D , está dada por

$$(FVMD) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \times H_{h0} \text{ tal que :} \\ a_{p_h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in H_{h0}, \end{cases} \quad (2.1.12)$$

donde, si $\kappa(p)$ satisface (2.1.2) y (2.1.3) se tiene

$$a_{p_h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \kappa(p_h) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \quad \text{Forma bilineal } Q_h \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}.$$

De forma análoga, la forma bilineal b y los funcionales F y G para las variables discretas son igualmente definidos como en el capítulo anterior. Además, similarmente como se hizo para el caso continuo, se tiene que

$$\begin{aligned} |a_{p_h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq \kappa_{max} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} && \text{luego es continua en } Q_h \\ a_{p_h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &\geq \kappa_{min} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 && \text{luego es coerciva en } Q_h. \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{N}(B_h)$ y $\mathcal{N}(B_h)^\perp$ el núcleo discreto de b y su respectivo complemento ortogonal definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(B_h) &= \{\mathbf{v}_h \in Q_h : b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in H_{h0}\}, \\ \mathcal{N}(B_h)^\perp &= \{\mathbf{v}_h \in Q_h : \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w}_h = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{N}(B_h)\}. \end{aligned}$$

Del capítulo anterior también se garantiza la condición inf-sup discreta de la forma bilineal b , es decir que existe un $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \geq \beta_h |q_h|_{H^1} \quad \forall q_h \in H_{h0}, \quad (2.1.13)$$

La existencia y unicidad de la solución para el problema discreto, se sigue del siguiente teorema.

Teorema 2.1.2. Sean Q_h y H_{h0} el par de espacios finito dimensionales que satisfacen (2.1.13). Suponga que la solución de (2.1.4) $(\mathbf{u}, p) \in Q \times H_{0D}^1(\Omega)$ es tal que $\mathbf{u} \in [L^3(\Omega)]^n$ y es lo suficientemente pequeña en el sentido que

$$\frac{1}{\beta} \frac{\kappa_{max} + \kappa_{min}}{\kappa_{min}} C(\Omega) L_\kappa \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \leq \theta < 1. \quad (2.1.14)$$

Entonces (2.1.4) y (2.1.12) tienen solución única y existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que la solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \times H_{0h}$ del problema (2.1.12) satisface

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + |p - p_h|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \inf_{q_h \in H_{h0}} |p - q_h|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Demostración (Basada en [26])

La demostración de este teorema, se sigue del análisis de error descrito en el capítulo anterior. Por simplicidad se supone que $\|B_h\| \leq 1$. Dado que la condición inf-sup (2.1.13) se satisface, entonces (como se explicó en 1.2.5) para un \mathbf{v}_h cualquiera en Q_h , existe un $\mathbf{r}_h \in [L^2(\Omega)]^n$ tal que

$$b(\mathbf{r}_h, q_h) = b(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall q_h \in H_{h0}, \quad (2.1.15)$$

además

$$\beta \|\mathbf{r}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}. \quad (2.1.16)$$

Sea $\mathbf{w}_h = \mathbf{r}_h + \mathbf{v}_h$. Entonces $\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h \in \mathcal{N}(B_h)$ ya que

$$b(\mathbf{w}_h, q_h) = b(\mathbf{r}_h + \mathbf{v}_h, q_h) = b(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, q_h) + b(\mathbf{v}_h, q_h) = b(\mathbf{u}, q_h) = \int_{\Gamma_N} g q_h = b(\mathbf{u}_h, q_h).$$

Por la coercividad de a_{ph} se tiene

$$\begin{aligned} \kappa_{min} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq \sup_{\mathbf{y}_h \in \mathcal{N}(B_h)} \frac{a_{ph}(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{y}_h)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &\leq \sup_{\mathbf{y}_h \in \mathcal{N}(B_h)} \frac{a_{ph}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{y}_h)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} + \sup_{\mathbf{y}_h \in V_h} \frac{a_{ph}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{y}_h)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &\leq \sup_{\mathbf{y}_h \in \mathcal{N}(B_h)} \frac{a_{ph}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{y}_h)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} + \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \end{aligned}$$

Por otro lado, si se sustrae la primera ecuación de (2.1.4) de la primera ecuación de (2.1.12) con $\mathbf{y}_h \in \mathcal{N}(B_h)$ como función de prueba, entonces

$$\int_{\Omega} (\kappa(p_h) \mathbf{u}_h - \kappa(p) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{y}_h + \int_{\Omega} \mathbf{y}_h \cdot \nabla(p_h - p) = 0,$$

así que después de sumar y restar $(\kappa(p_h) \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}_h)$ y $(\mathbf{y}_h \cdot \nabla q_h)$ se concluye que

$$a_{ph}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{y}_h) = \int_{\Omega} (\kappa(p) - \kappa(p_h)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}_h + \int_{\Omega} \mathbf{y}_h \cdot \nabla(q_h - p_h) + \int_{\Omega} \mathbf{y}_h \cdot \nabla(p - q_h) \quad (2.1.17)$$

Es de notar que la segunda integral es cero porque $\mathbf{y}_h \in \mathcal{N}(B_h)$ como se mencionó arriba. Luego

$$\begin{aligned} a_{ph}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{y}_h) &\leq L_{\kappa} \|p - p_h\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} |p - q_h|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega) L_{\kappa} |p - p_h|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} |p - q_h|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\kappa_{min} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq C(\Omega) L_{\kappa} |p - p_h|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} + |p - q_h|_{H^1(\Omega)} + \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}.$$

Por desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} &\leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}, \\
&\leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \underbrace{\|\mathbf{w}_h - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}}_{\mathbf{r}_h} \\
&\leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n},
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \underbrace{\|\mathbf{w}_h - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}}_{\mathbf{r}_h} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n},
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\kappa_{min} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} &\leq (\kappa_{max} + \kappa_{min}) \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \\
&\quad + C(\Omega) L_\kappa |p - p_h|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} + |p - q_h|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

De la condición inf-sup dada por (2.1.13) para $q_h \in H_h$

$$\begin{aligned}
\beta |p_h - q_h|_{H^1(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{y}_h \in Q_h} \frac{b(\mathbf{y}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\
&\leq \sup_{\mathbf{y}_h \in Q_h} \frac{b(\mathbf{y}_h, p_h - p)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} + \sup_{\mathbf{y}_h \in Q_h} \frac{b(\mathbf{y}_h, p - q_h)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\
&\leq \sup_{\mathbf{y}_h \in Q_h} \frac{b(\mathbf{y}_h, p_h - p)}{\|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} + |p - q_h|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sustrayendo la primera ecuación de (2.1.4) de la primera ecuación de (2.1.12), como se hizo arriba pero resolviendo para la forma bilineal b se tiene que

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{y}_h, p_h - p) &= \int_{\Omega} (\kappa(p) - \kappa(p_h)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}_h + \int_{\Omega} \kappa(p_h) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{y}_h \\
&\leq C(\Omega) L_\kappa |p - p_h|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \|\mathbf{y}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n},
\end{aligned}$$

por tanto

$$|p_h - q_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} C(\Omega) L_\kappa \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} |p - p_h|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\beta} \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \frac{1}{\beta} |p - q_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Por desigualdad triangular y (2.1.14) se tiene

$$\frac{\kappa_{max} + \kappa_{min}(1 - \theta)}{\kappa_{max} + \kappa_{min}} |p - p_h|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) |p - q_h|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\beta} \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}.$$

Finalmente incorporando esta última ecuación en (2.1.18)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + |p - q_h|_{H^1(\Omega)}) + \frac{\kappa_{max} \theta}{\kappa_{max} + \kappa_{min}(1 - \theta)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n},$$

desde que

$$1 - \frac{\kappa_{max}\theta}{\kappa_{max} + \kappa_{min}(1 - \theta)} > 0$$

y como $(\mathbf{v}_h, q_h) \in Q_h \times H_{h0}$ son arbitrarios se satisface la condición del teorema. \blacksquare

Girault et al [26] proponen un algoritmo iterativo para resolver el sistema discreto no lineal (2.1.12). Dicho algoritmo consiste en, para $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h^{(m+1)}, p_h^{(m+1)}) \in Q_h \times H_{h0} \text{ tal que :} \\ a_{p_h^{(m)}}(\mathbf{u}_h^{(m+1)}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{(m+1)}) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ b(\mathbf{u}_h^{(m+1)}, q_h) = G(q_h) \quad \forall q_h \in H_{h0}, \end{cases} \quad (2.1.19)$$

dado un $p_h^{(0)}$ como dato de partida, se corresponde a un esquema de punto fijo. La convergencia del anterior esquema está respaldada por la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. *Sea (\mathbf{u}, p) , la solución de (2.1.4), lo suficientemente pequeña en el sentido que existe una constate $\theta < 1$ tal que para cada h*

$$\frac{1}{\beta} \frac{\kappa_{max} + \kappa_{min}}{\kappa_{min}} C(\Omega) L_\kappa \|\mathbf{u}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \leq \theta. \quad (2.1.20)$$

También suponga que el par de espacios (Q_h, H_{h0}) satisfacen (2.1.13), entonces en el esquema iterativo (2.1.19) las siguientes cotas se mantienen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^n} &\leq \frac{1}{\kappa_{max} + \kappa_{min}} \theta^{m+1} |p_h - p_h^{(0)}|_{H^1(\Omega)} \\ |p_h - p_h^{(m+1)}|_{H^1(\Omega)} &\leq \theta^{m+1} |p_h - p_h^{(0)}|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Demostración

Restando (2.1.4) y (2.1.19)

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\kappa(p_h) \mathbf{u}_h - \kappa(p_h^{(m)}) \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (p_h - p_h^{(m+1)}) = 0, & \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot \nabla q_h = 0, & \forall q_h \in H_{h0}, \end{cases} \quad (2.1.21)$$

sumando y restando $\kappa(p_h^{(m)}) \mathbf{u}_h$ en la primera integral de (2.1.21)

$$\int_{\Omega} \kappa(p_h^{(m)}) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \kappa(p_h^{(m)})) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (p_h - p_h^{(m+1)}) = 0,$$

sea $\mathbf{v}_h = (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)})$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa(p_h^{(m)}) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) + \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \kappa(p_h^{(m)})) \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot \nabla (p_h - p_h^{(m)}) = 0, \end{aligned}$$

dato que $(p_h - p_h^{(m)}) \in H_{h0}$ entonces, por la segunda ecuación de (2.1.21), la tercera integral de arriba es cero. Por tanto

$$\left| \int_{\Omega} \kappa(p_h^{(m)}) |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}|^2 \right| = \left| \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \kappa(p_h^{(m)})) \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \right|.$$

Usando la propiedad de Lipschitz (2.1.3) y la inyección en espacios de Sobolev dada por (2.1.8), se tiene que

$$\begin{aligned} \kappa_{min} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\leq \left| \int_{\Omega} (\kappa(p_h^{(m)}) - \kappa(p_h)) \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \right| \\ &\leq \|(\kappa(p_h^{(m)}) - \kappa(p_h))\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \\ &\leq C(\Omega) L_{\kappa} |p_h^{(m)} - p_h|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^3(\Omega)]^n} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \end{aligned}$$

por (2.1.20) se tiene

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq \frac{\theta \beta}{\kappa_{max} + \kappa_{min}} |p_h^{(m)} - p_h|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.1.22)$$

Por otro lado, de la condición inf-sup (2.1.13) y usando nuevamente (2.1.3) y (2.1.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \beta |p_h - p_h^{(m+1)}|_{H^1(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot (p_h - p_h^{(m+1)})}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &= \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} (\kappa(p_h) \mathbf{u}_h - \kappa(p_h^{(m)}) \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &= \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} \kappa(p_h^{(m)}) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{(m+1)}) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \kappa(p_h^{(m)})) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &\leq \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\kappa(p_h) - \kappa(p_h^{(m)})\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^3(\Omega)]^n} \\ &\leq \kappa_{max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{(m+1)}\|_{[L^2(\Omega)]^n} + C(\Omega) L_{\kappa} |p_h - p_h^{(m)}|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^3(\Omega)]^n}. \end{aligned}$$

Debido a (2.1.22) y (2.1.20) se tiene

$$\begin{aligned} |p_h - p_h^{(m+1)}|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{\kappa_{max} + \kappa_{min}}{\kappa_{max} + \kappa_{min}} \theta |p_h - p_h^{(m)}|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \theta |p_h - p_h^{(m)}|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

De esta desigualdad y de (2.1.22) se siguen las cotas de error mencionadas. ■

2.1.3. Implementación

Teniendo en cuenta las bases, el procedimiento descrito y los resultados obtenidos en la segunda parte del capítulo anterior, para este caso en particular se tiene que

$$A_{ij}^K = \int_K \kappa(p_h) \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K$$

por lo que

$$\mathbf{A}^K = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \kappa(p_h) \Psi_1^K \cdot \Psi_1^K & \int_{\Omega} \kappa(p_h) \Psi_2^K \cdot \Psi_1^K \\ \int_{\Omega} \kappa(p_h) \Psi_1^K \cdot \Psi_2^K & \int_{\Omega} \kappa(p_h) \Psi_2^K \cdot \Psi_2^K \end{bmatrix}.$$

Desarrollando y usando la cuadratura de integración baricéntrica sobre triángulos se tiene

$$\mathbf{A}^K = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \kappa(p_h) & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} \kappa(p_h) \end{bmatrix} = |K| \begin{bmatrix} \kappa(p_h(\text{bar})) & 0 \\ 0 & \kappa(p_h(\text{bar})) \end{bmatrix}$$

Comentario 2.1.1. *Es de notar que la matriz local asociada a la forma bilineal b y los vectores locales correspondientes a F y G , se construyen como se describió en el capítulo anterior dados por (1.3.15), (1.3.16) y (1.3.17). Para finalizar, teniendo en cuenta el algoritmo para resolver el sistema no lineal (2.1.19), la matriz A debe calcularse de nuevo en cada iteración con el p_h hallado en el paso anterior.*

2.1.4. Dependencia exponencial de la Permeabilidad

Descripción del problema

En un proceso de recobro mejorado, el petróleo es obligado a fluir a través del yacimiento por el empuje de los fluidos inyectados a alta presión. Experimentalmente se ha observado que las altas variaciones en la presión, inducen a una variación exponencial en la porosidad del medio. Para tal fin se hace necesario estudiar el problema de Darcy dado por (2.1.1) con la salvedad de que

$$\kappa(p) = \kappa_0 e^{\gamma p}, \quad (2.1.23)$$

donde κ_0 y γ son parámetros positivos. Por tal motivo, es claro que las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) no se satisfacen, por lo que la teoría estudiada en la sección anterior no aplica en este caso. Girault et al [26] proponen una estrategia para abordar este tipo de problemas, donde básicamente a través de un cambio de variable descomponen el problema de Darcy no lineal en dos problemas lineales.

Sea $p \in L^\infty(\Omega)$. Despejando \mathbf{u} en la primera ecuación de (2.1.1) y reemplazándola en la segunda de (2.1.1), teniendo en cuenta (2.1.23) se tiene

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \text{div} \left(\frac{e^{-\gamma p}}{\kappa_0} \mathbf{f} - \frac{e^{-\gamma p}}{\kappa_0} \nabla p \right) = 0. \quad (2.1.24)$$

Dado que

$$\frac{e^{-\gamma p}}{\kappa_0} \nabla p = -\frac{1}{\kappa_0 \gamma} \nabla e^{-\gamma p}, \quad (2.1.25)$$

entonces multiplicando $\kappa_0 \gamma$ en (2.1.24) se obtiene

$$\gamma \nabla \cdot (e^{-\gamma p} \mathbf{f}) + \Delta e^{-\gamma p} = 0. \quad (2.1.26)$$

Si se hace

$$q = e^{-\gamma p} - 1, \quad (2.1.27)$$

entonces (2.1.26) se puede reescribir como

$$-\Delta q - \gamma \nabla \cdot (q \mathbf{f}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{f},$$

además es claro que

$$q + 1 = e^{-\gamma p} = \frac{\kappa_0}{\kappa(p)},$$

luego

$$\kappa(p) = \frac{\kappa_0}{q + 1}, \quad (2.1.28)$$

y como $p_D = 0$ en Γ_D , entonces $q = 0$ en Γ_D .

Por otro lado, multiplicando la primera ecuación de (2.1.1) por \mathbf{n} en Γ_N e implementando los resultados (2.1.25), (2.1.27) y (2.1.28) se tiene

$$\kappa_0 \gamma g - \nabla q \cdot \mathbf{n} = \gamma q (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + \gamma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}).$$

Sea $F_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, entonces la expresión anterior puede reescribirse como

$$\nabla q \cdot \mathbf{n} + \gamma F_n q = \kappa_0 \gamma g - \gamma F_n.$$

Teniendo en cuenta lo hecho anteriormente, se ha obtenido el siguiente problema auxiliar de valores en la frontera con respecto a la variable q

$$(PFA) \begin{cases} \text{Hallar } q \text{ tal que :} \\ -\Delta q - \gamma \nabla \cdot (q \mathbf{f}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ q = 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \nabla q \cdot \mathbf{n} + \gamma F_n q = \kappa_0 \gamma g - \gamma F_n & \text{en } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.1.29)$$

La estrategia para resolver el problema de Darcy no lineal descrito en esta sección consiste en:

1) Hallar q que resuelve el problema (2.1.29).

2) Hallar $\bar{\kappa}$ tal que

$$\bar{\kappa}(X) = \frac{\kappa_0}{q(X) + 1} \quad (2.1.30)$$

3) Hallar (\mathbf{U}, P) que resuelven

$$(PFA2) \begin{cases} \bar{\kappa} \mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \text{div}(\mathbf{U}) = 0 & \text{en } \Omega \\ P = p_D & \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = g & \text{en } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.1.31)$$

donde (\mathbf{U}, P) serían también la solución de (2.1.12).

Consistencia del problema

La idea clave en esta estrategia es probar que (\mathbf{U}, P) que soluciona (2.1.31) también soluciona el problema (2.1.1) con $\kappa(p)$ descrita por (2.1.23). Para garantizar la coherencia del procedimiento descrito, es pertinente mostrar que el problema (2.1.29) está bien puesto y además verificar la correspondencia de las soluciones.

Para verificar que el problema (2.1.29) está bien puesto, se recurre a encontrar su respectiva formulación variacional y aplicar el ya mencionado teorema de Lax-Milgram. Luego, multiplicando la ecuación diferencial de (2.1.29) por una función $r \in H_{0D}^1$ e integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\Delta q) r - \int_{\Omega} \gamma \nabla \cdot (q \mathbf{f}) r &= \int_{\Omega} \gamma \nabla \cdot (\mathbf{f}) r, \\ \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r - \int_{\Gamma} r (\nabla q \cdot \mathbf{n}) + \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot (q \mathbf{f}) - \gamma \int_{\Gamma} r q F_n &= \gamma \int_{\Gamma} r F_n - \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot \mathbf{f}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r - \int_{\Gamma_N} \gamma (\kappa_0 g - F_n - F_n q) r + \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot (q \mathbf{f}) - \gamma \int_{\Gamma_N} r q F_n &= \gamma \int_{\Gamma_N} r F_n - \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot \mathbf{f}, \\ \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r - \kappa_0 \gamma \int_{\Gamma_N} g r + \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot (q \mathbf{f}) &= -\gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Por tanto, para $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$, la formulación variacional para el problema (2.1.29) es:

$$(FVA) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } q \in H_{0D}^1 \text{ tal que :} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r + \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot (q \mathbf{f})}_{a(q,r)} = \underbrace{\kappa_0 \gamma \int_{\Gamma_N} g r - \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot \mathbf{f}}_{F(r)} \quad \forall r \in H_{0D}^1. \end{array} \right. \quad (2.1.32)$$

Para probar la continuidad de a , se asume la existencia de una constante \mathcal{Y} tal que

$$\gamma C(\Omega) \|\mathbf{f}\|_{[L^3(\Omega)]^n} \leq \mathcal{Y} < 1, \quad (2.1.33)$$

luego usando (2.1.8) se tiene

$$\begin{aligned} |a(q, r)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r + \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot (q \mathbf{f}) \right| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r \right| + \gamma \left| \int_{\Omega} \nabla r \cdot (q \mathbf{f}) \right| \\ &\leq |q|_{H^1(\Omega)} |r|_{H^1(\Omega)} + \gamma \|q\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{[L^3(\Omega)]^n} |r|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq |q|_{H^1(\Omega)} |r|_{H^1(\Omega)} + \gamma C(\Omega) |q|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{[L^3(\Omega)]^n} |r|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \max\{1, \mathcal{Y}\} |q|_{H^1(\Omega)} |r|_{H^1(\Omega)} \leq C \|r\|_{H^1(\Omega)} \|r\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Además,

$$\left| \gamma \int_{\Omega} q \mathbf{f} \cdot \nabla q \right| \leq \mathcal{Y} |q|_{H^1(\Omega)}^2,$$

por lo que

$$-\mathcal{Y}|q|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \gamma \int_{\Omega} q \mathbf{f} \cdot \nabla q,$$

así, por la desigualdad de Poincare

$$\begin{aligned} a(q, q) &= \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla q + \gamma \int_{\Omega} q \mathbf{f} \cdot \nabla q \geq |q|_{H^1(\Omega)}^2 - \mathcal{Y}|q|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\geq (1 - \mathcal{Y}) |q|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

por tanto a es coerciva. Por otro lado, para F usando la desigualdad de la traza se tiene que

$$\begin{aligned} |F(r)| &= \left| \kappa_0 \gamma \int_{\Gamma_N} gr - \gamma \int_{\Omega} \nabla r \cdot \mathbf{f} \right| \leq \kappa_0 \gamma \left| \int_{\Gamma_N} gr \right| + \gamma \left| \int_{\Omega} \nabla r \cdot \mathbf{f} \right| \\ &\leq \kappa_0 \gamma \|g\|_{-1/2, \Gamma_N} \|r\|_{1/2, \Gamma_N} + \gamma \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^n} |r|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \kappa_0 \gamma \|g\|_{-1/2, \Gamma_N} |r|_{H^1(\Omega)} + \gamma \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^n} |r|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|r\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Bajo lo hecho anteriormente, se garantiza que (2.1.32) tiene solución única, es decir que está bien puesto.

Por otra parte, el problema (2.1.31) estará bien definido en sentido matemático y físico si $\bar{\kappa}$ definido por (2.1.30) pertenece a L^∞ y se aleja de cero. Para ello es necesario que exista un q_0 tal que $q + 1 \geq q_0 > 0$. Debido a la condición anterior, se garantiza que existe un único $\hat{P} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$e^{-\gamma \hat{P}} = q + 1. \quad (2.1.34)$$

Dado que $q = 0$ en Γ_D , entonces $\hat{P} \in H_{0D}^1$. Si se define ahora $\hat{U} = \frac{1}{\kappa_0 \gamma} (\nabla q + \gamma(q + 1)\mathbf{f})$, luego por la primera ecuación de (2.1.29) se tiene que $\text{div}(\hat{U}) = 0$. De (2.1.34) se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \frac{1}{\kappa_0 \gamma} \left[\nabla(e^{-\gamma \hat{P}} - 1) + \gamma e^{-\gamma \hat{P}} \mathbf{f} \right] \\ &= \frac{1}{\kappa_0 \gamma} \left[\gamma e^{-\gamma \hat{P}} (\mathbf{f} - \nabla \hat{P}) \right], \end{aligned}$$

por tanto

$$\kappa(\hat{P}) \hat{U} + \nabla \hat{P} = \mathbf{f}.$$

Además si se multiplica \hat{U} por \mathbf{n} en Γ_N se tiene

$$\hat{U} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa_0 \gamma} [\nabla q \cdot \mathbf{n} + \gamma q F_n + \gamma F_n],$$

por la condición en Γ_N de (2.1.32) se concluye que $\hat{U} \cdot \mathbf{n} = g$ en Γ_N . El desarrollo anterior implica que (\hat{U}, \hat{P}) además de solucionar (2.1.1) para el caso estudiado en esta sección, también es solución de

$$\frac{\kappa_0}{q + 1} \hat{U} + \nabla \hat{P} = \mathbf{f}$$

y ya que la solución de (2.1.31) es única, entonces $(\hat{U}, \hat{P}) = (U, P)$.

Discretización del Problema

A continuación se mostrará la forma discreta de la estrategia formulada por Girault et al [26]. Para discretizar (2.1.29), se introducen los espacios finito dimensionales W_h y $W_{h0} \subset H_{0D}^1$ definidos igual que (1.3.5) y (1.3.6) respectivamente. Para aproximar el sistema (2.1.31) se usarán los espacios H_{h0} y Q_h descritos en el capítulo anterior, y que además satisfacen (2.1.13). Entonces el algoritmo discreto se estudia como:

1) Hallar $q_h \in W_{h0}$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \nabla r_h + \gamma \int_{\Omega} \nabla r_h \cdot (q_h \mathbf{f}) = \kappa_0 \gamma \int_{\Gamma_N} g r_h - \gamma \int_{\Omega} \nabla r_h \cdot \mathbf{f} \quad \forall r_h \in W_{h0} \quad (2.1.35)$$

2) Calcular

$$\hat{\kappa}_h = \frac{\kappa_0}{q_h(X) + 1} \quad \text{para } X \in \Omega \quad (2.1.36)$$

3) Hallar $(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h) \in Q_h \times H_{h0}$ que resuelven

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \hat{\kappa}_h \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \hat{p}_h = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h, & \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla s_h = \int_{\Gamma_N} g s_h, & \forall s_h \in H_{h0} \end{cases} \quad (2.1.37)$$

De lo planteado anteriormente, cabe resaltar que la existencia y unicidad de (2.1.35) se garantiza para los mismos supuestos hechos en (2.1.32). Además se debe garantizar que $q_h \in L^\infty$ tal que $q_h + 1 > 0$ para conservar el sentido práctico del problema y para también asegurar que (2.1.37) tiene solución única, según lo visto en la sección anterior.

Implementación

Teniendo en cuenta a (2.1.35) y dado que W_h tiene una base similar a la de H_h , entonces es claro que

$$q_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i, \quad \nabla q_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

donde

$$\varphi_i(X) = a_i x + b_i y + c_i, \quad \varphi_i(X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

luego

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i, \varphi_j) &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot (\varphi_i \mathbf{f}) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \varphi_i^K \cdot \nabla \varphi_j^K + \gamma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \varphi_j^K \cdot (\varphi_i \mathbf{f}), \\
F(\varphi_j) &= \kappa_0 \gamma \int_{\Gamma_N} g \varphi_j - \gamma \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_j \\
&= \kappa_0 \gamma \sum_{E \in \Gamma_N} \int_E g \varphi_j^K - \gamma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_j^K,
\end{aligned}$$

donde φ_j^K son las funciones básicas para cada triángulo K .

Las componentes de la matriz local $\hat{\mathbf{A}}^K$ están dadas por

$$\hat{A}_{i,j}^K = \int_K \nabla \varphi_i^K \cdot \nabla \varphi_j^K,$$

por tanto

$$\hat{\mathbf{A}}^K = \begin{bmatrix} \int_K \nabla \varphi_1^K \cdot \nabla \varphi_1^K & \int_K \nabla \varphi_2^K \cdot \nabla \varphi_1^K & \int_K \nabla \varphi_3^K \cdot \nabla \varphi_1^K \\ \int_K \nabla \varphi_1^K \cdot \nabla \varphi_2^K & \int_K \nabla \varphi_2^K \cdot \nabla \varphi_2^K & \int_K \nabla \varphi_3^K \cdot \nabla \varphi_2^K \\ \int_K \nabla \varphi_1^K \cdot \nabla \varphi_3^K & \int_K \nabla \varphi_2^K \cdot \nabla \varphi_3^K & \int_K \nabla \varphi_3^K \cdot \nabla \varphi_3^K \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

Resolviendo queda

$$\hat{\mathbf{A}}^K = |K| \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}_{G_d^t} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}}_{G_d}{}_{2 \times 3}.$$

Las componentes de la matriz local $\bar{\mathbf{A}}^K$ están dados por

$$\bar{A}_{i,j}^K = \gamma \int_K (\varphi_i \mathbf{f}) \cdot \nabla \varphi_j^K,$$

de esta forma

$$\bar{\mathbf{A}}^K = \gamma \begin{bmatrix} \int_K \varphi_1 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_1 & \int_K \varphi_2 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_1 & \int_K \varphi_3 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_1 \\ \int_K \varphi_1 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_2 & \int_K \varphi_2 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_2 & \int_K \varphi_3 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_2 \\ \int_K \varphi_1 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_3 & \int_K \varphi_2 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_3 & \int_K \varphi_3 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

Resolviendo y usando la cuadratura de integración del baricentro sobre triángulos se tiene

$$\bar{\mathbf{A}}^K = \frac{\gamma|K|}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}_{G_d^t} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\text{bar}) & \mathbf{f}(\text{bar}) & \mathbf{f}(\text{bar}) \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\hat{b}_j^k = \gamma \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_j,$$

por tanto, para el vector local $\hat{\mathbf{b}}^K$, usando la cuadratura de integración del baricentro sobre triángulos, se tiene

$$\hat{\mathbf{b}}^K = \begin{bmatrix} \gamma \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_1 \\ \gamma \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_2 \\ \gamma \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \gamma|K| \begin{bmatrix} f_1(\text{bar}) & f_2(\text{bar}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1(\text{bar}) & f_2(\text{bar}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_1(\text{bar}) & f_2(\text{bar}) \end{bmatrix}_{3 \times 6} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}_{6 \times 1},$$

donde $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$. Además, se tiene también que

$$\bar{b}_j^K = \kappa_0 \gamma \int_E g \varphi_j,$$

entonces para $\bar{\mathbf{b}}^K$ usando la cuadratura de Simpson 1/3,

$$\bar{\mathbf{b}}^K = \begin{bmatrix} \kappa_0 \gamma \int_E g \varphi_1 \\ \kappa_0 \gamma \int_E g \varphi_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \frac{\kappa_0 \gamma |E|}{6} \begin{bmatrix} g(P_1) + 2g(P_m) \\ g(P_2) + 2g(P_m) \end{bmatrix}_{2 \times 1},$$

donde P_1, P_2 son los puntos extremos de E y P_m el punto medio entre estos.

Comentario 2.1.2. Una vez calculado q_h se encuentra $\hat{\kappa}$ usando (2.1.36). Para la construcción y desarrollo de las matrices asociadas al tercer paso de la estrategia descrita se usan las expresiones dadas por (1.3.14), (1.3.15), (1.3.16) y (1.3.17).

Proposición 2.1.3. Además de (2.1.13) y (2.1.33), suponga que q_h solución de (2.1.35), satisface $0 < q_{\min} \leq q_h + 1 \leq q_{\max}$ para $X \in \Omega$. Si $(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h) \in Q_h \times H_{h0}$ soluciona (2.1.37), entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + |p_h - \hat{p}_h|_{H^1(\Omega)} \leq C \sup_{X \in \Omega} |\kappa(p_h(X)) - \hat{\kappa}_h(X)| \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}, \quad (2.1.38)$$

donde $(\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \times H_{h0}$ soluciona (2.1.12)

Demostración

Restando (2.1.12) y (2.1.37)

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\kappa(p_h) \mathbf{u}_h - \hat{\kappa}_h \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (p_h - \hat{p}_h) = 0, & \forall \mathbf{v}_h \in Q_h \\ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \nabla s_h = 0, & \forall s_h \in H_{h0}, \end{cases} \quad (2.1.39)$$

sumando y restando $\hat{\kappa}_h \mathbf{u}_h$ en la primera integral de (2.1.39)

$$\int_{\Omega} \hat{\kappa}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (p_h - \hat{p}_h) = 0.$$

Sea $\mathbf{v}_h = (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h)$, entonces

$$\int_{\Omega} \hat{\kappa}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) + \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h) \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \nabla (p_h - \hat{p}_h) = 0.$$

Dado que $(p_h - \hat{p}_h) \in H_{h0}$, entonces por la segunda ecuación de (2.1.39) la tercera integral de arriba es cero. Por tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \hat{\kappa}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \right| &= \left| \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h) \mathbf{u}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \right| \\ \frac{\kappa_0}{q_{max}} \|\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 &\leq \left| \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h) \mathbf{u}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \right| \\ \|\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} &\leq C \sup_{X \in \Omega} |\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h| \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \end{aligned}$$

Por otro lado, de la condición inf-sup (2.1.13) se tiene

$$\begin{aligned} \beta |p_h - \hat{p}_h|_{H^1(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (p_h - \hat{p}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &= \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} (\kappa(p_h) \mathbf{u}_h - \hat{\kappa}_h \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &= \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} \frac{\int_{\Omega} \hat{\kappa}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n}} \\ &\leq C \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} |\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h| \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \\ &\leq C \sup_{\mathbf{v}_h \in Q_h} |\kappa(p_h) - \hat{\kappa}_h| \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Ecuación de Darcy-Forchaimmer

2.2.1. Formulación del problema

La ecuación de Darcy estudiada anteriormente, tiene como propósito fundamental, modelar los fenómenos físicos que involucran flujo de fluidos en un medio poroso. Varias aplicaciones al respecto fueron mencionadas en el capítulo 1 de la presente tesis. Una de ellas es referida al proceso de recobro mejorado de hidrocarburos en un yacimiento con poco empuje, por lo que las reservas tienen poca movilidad como para ser producidas a través de un pozo. Sin embargo, la ecuación de Darcy, solo es válida para condiciones de bajas velocidades de flujo y yacimientos con bajas porosidades y permeabilidades [39].

Cuando las velocidades de flujo son altas ($Re > 0,1$ aproximadamente) y la porosidad en el medio no es uniforme, entonces la relación entre la velocidad y el gradiente de presión del fluido no es lineal. Este hecho fue estudiado por Forchaimmer en 1901 [8], quien modificó la ecuación planteada por Darcy, sumándole un término de segundo orden como sigue:

$$\frac{\mu}{k\rho} \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (2.2.1)$$

donde p y \mathbf{u} representan la presión y velocidad del fluido, k es la permeabilidad del medio, \mathbf{f} las fuerzas de volumen, $\rho, \mu, \hat{\beta} > 0$ representan la densidad, viscosidad y viscosidad dinámica del fluido respectivamente. $\hat{\beta}$ también es referido como el término de Forchaimmer [39]. En (2.2.1), $|\cdot|$ denota la norma euclidiana, es decir, $|\mathbf{u}| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Entonces para un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) con frontera mixta Γ , con condiciones apropiadas y bajo la suposición de flujo incompresible, es decir $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ en Ω , la formulación fuerte para la ecuación de Darcy-Forchaimmer está dada por

$$(PF) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) \text{ tal que :} & \\ \frac{\mu}{k\rho} \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{en } \Omega \\ p = p_D & \text{sobre } \Gamma_D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{sobre } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal exterior unitario a Γ .

A continuación se estudiará el problema de valores en la frontera (2.2.2) utilizando el método de elementos finitos. Se hallará una formulación variacional adecuada, se probará la existencia y unicidad de la solución y se describirá en detalle la implementación del método.

2.2.2. Formulaci3n variacional

Preliminares

En este capitulo en particular, se usar4 la nomenclatura correspondiente a espacios de Sobolev [2], por lo que a continuaci3n se presenta una breve descripci3n. Sea $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ una terna de enteros no negativos, y haga $|\eta| = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Se define la derivada parcial ∂^η como

$$\partial^\eta(q) = \frac{\partial^{|\eta|} q}{\partial x^{\eta_1} \partial y^{\eta_2} \partial z^{\eta_3}}.$$

Para enteros M y P no negativos con $P \geq 1$, los espacios de Sobolev se definen como

$$W^{M,P}(\Omega) = \{q \in L^P(\Omega) : \partial^\eta q \in L^P(\Omega) \quad \forall |\eta| \leq M\},$$

equipado con seminorma

$$|q|_{M,P} = \left(\sum_{|\eta|=M} \int_{\Omega} |\partial^\eta q|^P \right)^{1/P}$$

y con norma

$$\|q\|_{M,P} = \left(\sum_{0 \leq |\eta| \leq M} |q|_{M,P}^P \right)^{1/P}.$$

Para encontrar una formulaci3n variacional de (2.2.2), se considerar4 el espacio vectorial \mathcal{H} y su respectiva norma, definidos como

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{v} \in [L^3(\Omega)]^n : \operatorname{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\},$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{v}\|_{0,3} + \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{0,2}.$$

Ahora, multiplicando e integrando la primera ecuaci3n de (2.2.2) con una funci3n $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{k\rho} \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Aplicando identidades de Green en la segunda integral y usando la condici3n Dirichlet de (2.2.2) y reorganizando t3rminos, queda que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{k\rho} \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \langle \gamma_n(\mathbf{v})|_{\Gamma_D}, p_D \rangle_{\Gamma_D} - \langle \gamma_n(\mathbf{v})|_{\Gamma_N}, p \rangle_{\Gamma_N}. \quad (2.2.3)$$

Por otro lado, multiplicando la segunda ecuación de (2.2.2) con una función $-q \in L^2(\Omega)$, se tiene

$$-\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.2.4)$$

Considerando los espacios

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{H} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N\} \\ \mathcal{H}_g &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{H} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = g \text{ en } \Gamma_N\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4), además de los espacios descritos arriba, entonces una formulación variacional para (2.2.2) es

$$(FVM) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) \in \mathcal{H}_g \times L^2(\Omega) \text{ tal que} & : \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_0 \\ -b(\mathbf{u}, q) = G(q) & \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (2.2.5)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{k\rho} \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} && \text{Forma No bilineal } \mathcal{H}_g \times \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) && \text{Forma bilineal } \mathcal{H}_0 \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Gamma_D} p_D(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) && \text{Funcional lineal } \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(q) &= 0 && \text{Funcional lineal } L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comentario 2.2.1. *Es de notar que \mathcal{H}_g no es un espacio vectorial. Sin embargo, la existencia y unicidad de la solución de (1.2.1) para una función g adecuada, se garantiza por la existencia y unicidad de la solución del problema homogéneo asociado, ya que si $g \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$, entonces existe un $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ tal que $\gamma_n(\mathbf{w}) = g$. Así que haciendo $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, se tiene que $\gamma_n(\mathbf{v}) = 0$ en Γ_N , por lo que \mathbf{v} satisface un problema homogéneo similar a (2.2.5).*

2.2.3. Existencia y unicidad de la solución del problema continuo

Para probar la existencia y unicidad de la solución para la formulación variacional (2.2.5), sin pérdida de generalidad se supondrá que $p_D = 0$.

Lema 2.2.1. *(Condición inf-sup) Existe una constante positiva β tal que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}_0} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}} \geq \beta \|q\|_Q, \quad \forall q \in Q \quad (2.2.6)$$

Demostración

Para verificar la condición inf-sup (2.2.6), se hace referencia al siguiente problema no lineal:

$$\begin{cases} \text{hallar } z \text{ tal que:} \\ -\operatorname{div}(|\nabla z| \nabla z) = q & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

el cual fue estudiado con profundidad en [16, 29] en donde concluyen que (2.2.7) tiene solución única $z \in W_0^{1,3}(\Omega)$ y además existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{1,3} \leq C \|q\|_{0,2}^{1/2},$$

por tanto, si se hace a $\mathbf{v}^* = -|\nabla z| \nabla z \in \mathcal{H}_0$ entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^*\|_{\mathcal{H}} &= \|\mathbf{v}\|_{0,3} + \|\operatorname{div}(\mathbf{v}^*)\|_{0,2} \\ &= \|\nabla z\|_{0,3} + \|q\|_{0,2} \\ &= \|\nabla z\|_{0,3}^2 + \|q\|_{0,2} \\ &\leq C \|q\|_{0,2} + \|q\|_{0,2} \\ &\leq C \|q\|_{0,2}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

De esta forma se tiene que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}_0} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}} \geq \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}^*)}{\|\mathbf{v}^*\|_{\mathcal{H}}} \geq \frac{\|q\|_{0,2}^2}{C \|q\|_{0,2}} = \frac{1}{C} \|q\|_{0,2} = \beta \|q\|_{0,2} \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.1. *La formulación variacional (2.2.5) tiene solución única $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{H}_0 \times Q$, y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{0,2}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,3}^3 + \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{0,2}^2 &\leq C \|\mathbf{f}\|_{0,2}^2 \\ \|p\|_{0,2} &\leq C (\|\mathbf{f}\|_{0,2} + \|\mathbf{f}\|_{0,2}^2) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Demostración

Definamos:

$$\mathcal{K}(0) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{H}_0 : \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall q \in Q\},$$

La formulación variacional (2.2.5) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u} \in \mathcal{K}(0) \text{ tal que:} \\ \underbrace{\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}_{(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}_{F(\mathbf{v})}. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

De forma equivalente, (2.2.10), se puede expresar como

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u} \in \mathcal{K}(0) \text{ tal que:} \\ \mathbf{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(0)} \mathbf{J}(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (2.2.11)$$

con

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^3 - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.2.12)$$

De acuerdo al teorema de Minty-Brower descrito con detalle en [43, 47], el sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ tiene solución única si el operador \mathbf{A} es acotado, monótono, hemicontinuo y coercivo.

Considere ahora las siguientes definiciones tomadas de [43, 47].

Definición 2.2.1. El operador $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ se dice monótono en un espacio reflexivo de Banach si

$$(\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}.$$

Si la desigualdad es estricta, entonces \mathbf{A} se dice que es estrictamente monótono.

Definición 2.2.2. El operador $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ se dice hemicontinuo si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$, la función de valor real $t \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{u} + t\mathbf{v}), \mathbf{v})$, es continua.

Definición 2.2.3. El operador $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, se dice coercivo si

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow \infty} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = +\infty.$$

De manera particular, el operador \mathbf{A} es acotado ya que

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \left[\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|\mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{v} \right| \\ &\leq \frac{\mu}{k\rho} \|\mathbf{u}\|_{3/2, \Omega} \|\mathbf{v}\|_{3, \Omega} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \|\mathbf{u}\|_{3, \Omega}^2 \|\mathbf{v}\|_{3, \Omega}. \end{aligned}$$

Por otro lado, note que \mathbf{J} es dos veces diferenciable [6, 28], por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in [L^3(\Omega)]^n \\ \mathbf{J}''(\mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}) + \frac{1}{|\mathbf{v}|}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in [L^3(\Omega)]^n, \end{aligned}$$

Además

$$\mathbf{J}''(\mathbf{0})(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in [L^3(\Omega)]^n,$$

y notemos que \mathbf{J}'' es simétrica definida positiva, ya que

$$\mathbf{J}''(\mathbf{v})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \frac{\mu}{k\rho} \|\mathbf{w}\|_{0,2,\Omega}^2. \quad (2.2.13)$$

Dado lo anterior, es claro que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \\ \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} (|\mathbf{u}|\mathbf{u} - |\mathbf{v}|\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= (\mathbf{J}'(\mathbf{u}) - \mathbf{J}'(\mathbf{v})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \end{aligned}$$

por el teorema del valor medio

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{J}''(\mathbf{v} + t(\mathbf{u} - \mathbf{v})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) dt,$$

teniendo en cuenta (2.2.13), se tiene que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \geq \frac{\mu}{k\rho} \int_0^1 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \geq \frac{\mu}{k\rho} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

por lo que según la definición 2.2.1, \mathbf{A} es un operador estrictamente monótono.

Por otra parte, sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} (\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}| (\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J}'(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v},$$

de igual manera, se tiene que

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} (\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}| (\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J}'(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v},$$

por tanto

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A}(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) - \mathbf{A}(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v})) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{J}'(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) - \mathbf{J}'(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v})) \cdot \mathbf{v}.$$

Sea ahora

$$H(t) = \mathbf{J}'(t(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) + (1-t)(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v})), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.2.14)$$

Por el teorema del valor medio, se tiene que

$$H(1) - H(0) = H'(c), \quad \text{para } c \in (0, 1), \quad (2.2.15)$$

teniendo en cuenta (2.2.14), se tiene que

$$H'(c) = \mathbf{J}''(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v} - c(t_2 - t_1) \mathbf{v}) \cdot (t_1 - t_2) \mathbf{v} \quad (2.2.16)$$

por tanto (2.2.15) se puede escribir como

$$(\mathbf{J}(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) - \mathbf{J}(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v})) = \mathbf{J}''(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v} - c(t_2 - t_1) \mathbf{v}) \cdot (t_1 - t_2) \mathbf{v},$$

así

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A}(\mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}) - \mathbf{A}(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v})) \cdot \mathbf{v} = (t_1 - t_2) \int_0^1 \mathbf{J}''(\mathbf{u} + t_2 \mathbf{v} - c(t_2 - t_1) \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Claramente, el lado derecho de la ecuación anterior, tiende a cero cuando $(t_1 - t_2) \rightarrow 0$. Así que el operador \mathbf{A} por la definición 2.2.2 es hemicontinua.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &\geq C \frac{\mu}{k\rho} \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3, \quad \text{para } C > 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq \frac{\hat{\beta}}{\rho} \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3,$$

se sigue entonces que

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}} \int_{\Omega} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq \frac{\hat{\beta} \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3}{\rho \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}} = \frac{\hat{\beta}}{\rho} \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^2 \rightarrow \infty$$

cuando $\|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega} \rightarrow \infty$. Por tanto, el operador \mathbf{A} por la definición 2.2.3 es coercivo. En vista del desarrollo hecho y por el teorema de Minty-Brower, el problema (2.2.11) tiene solución única. Además de (2.2.12), usando la desigualdad de Holder con peso se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{u}) &\geq C_1 \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 + C_2 \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3 - \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega}^2}{2\epsilon} - \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\geq \underbrace{\min\{C_1, C_2\}}_{\hat{C}} (\|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3) - C_3 \|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 \\ \therefore \hat{C} \mathbf{J}(\mathbf{u}) &\geq \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3 - \hat{C} C_3 \|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega}^2 - \hat{C} \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Por otra parte, se tiene que

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) \leq |\mathbf{J}(\mathbf{u})| \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2 + C_2 \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^3 + \frac{1}{2} \|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}^2. \quad (2.2.18)$$

Dado que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, entonces por (2.2.17) y (2.2.18) con $\epsilon = 1$, se llega a (2.2.9). De otra parte, teniendo en cuenta la condición inf-sup (2.2.6) la extensión de la teoría de Babuska-Brezzi para espacios de Banach reflexivos [22], existe un único p que satisface (2.2.5), entonces

$$\begin{aligned} \|p\|_{0,2,\Omega} &\leq \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v})}{\beta \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}{\beta \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq C (\|\mathbf{u}\|_{0,2,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{0,3,\Omega}^2 + \|\mathbf{g}\|_{0,2,\Omega}) \end{aligned}$$

De donde se llega a (2.2.10) ■

2.2.4. Formulación variacional discreta

A continuación se estudiará la discretización por elementos finitos para el problema de Darcy-Forchheimer para el caso bidimensional, haciendo referencia a la formulación variacional (2.2.5). Nuevamente, sea \mathcal{T}_h una partición regular de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ donde $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$, y los elementos K son triángulos. Además, $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \Gamma$ y $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$. Sea también $\mathcal{E}_h = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ el conjunto de todos los lados en \mathcal{T}_h . Sea H_h el espacio de polinomios de RT_0 y Q_h el espacio de funciones constantes, descritos en el capítulo anterior dados por (1.2.11). Además, considere a H_{hg} y H_{h0} dados por (1.2.12) y (1.2.13) respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior y de forma similar a lo hecho en el capítulo 1, la formulación variacional discreta está dada por:

$$(FVMD) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{H}_{hg} \times Q_h \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_{h0} \\ -b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \quad (2.2.19)$$

Nota: Por comodidad se trabajará con $\mathbf{u}_h \in H_{h0}$.

2.2.5. Existencia y unicidad (Problema discreto)

Para la prueba de existencia y unicidad, por simplicidad se considerará a $p_D = 0$. Además sea $\Pi_h : \mathcal{H}_0 \rightarrow H_{h0}$ el interpolador de Raviart Thomas [22]. Tal que como se mostró en el Capítulo 1 satisface

$$\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\Pi_h(\mathbf{v})) = \int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad \forall \psi \in Q_h. \quad (2.2.20)$$

Lema 2.2.2. *Existe una constante positiva β_h tal que*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in H_h} \frac{\int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H_h}} \geq \beta_h \|q_h\|_{Q_h}, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.2.21)$$

Demostración

Siguiendo el procedimiento descrito en [22], se tiene:

De manera similar a lo hecho en la demostración de la condición inf-sup para el problema continuo, se va a considerar el siguiente problema no lineal

$$\begin{cases} \text{Hallar } z \text{ tal que:} \\ -\operatorname{div}(|\nabla z| \nabla z) = q_h & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.2.22)$$

que tiene solución única $z \in W_0^{1,3}(\Omega)$ y además existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{1,3} \leq C \|q_h\|_{0,2}^{1/2},$$

donde nuevamente haciendo $\mathbf{v}^* = -|\nabla z| \nabla z$ se llega a que $\|\mathbf{v}^*\|_{\mathcal{H}} \leq C \|q_h\|_{0,2}$. Ahora si se considera además el problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } \hat{z} \text{ tal que:} \\ -\Delta \hat{z} = \operatorname{div}(\mathbf{v}^*) & \text{en } \Omega \\ \hat{z} = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \nabla \hat{z} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases}$$

cuya formulación variacional, multiplicando por una función $r \in H_{0D}^1(\Omega)$ es

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{z} \cdot \nabla r = \int_{\Omega} r \operatorname{div}(\mathbf{v}^*) \quad \forall r \in H_{0D}^1(\Omega), \quad (2.2.23)$$

el cual, aplicando el teorema de Lax-Milgram, podemos concluir que tiene solución única y

$$\|\hat{z}\|_{1,2} \leq C \|\operatorname{div}(\mathbf{v}^*)\|_{0,2}. \quad (2.2.24)$$

Si se define ahora $\hat{\mathbf{v}} = -\nabla \hat{z}$, entonces por (2.2.23) se tiene que $\operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}^*)$ en Ω . Teniendo en cuenta (2.2.20) y haciendo $\Pi_h(\hat{\mathbf{v}}) = \hat{\mathbf{v}}_h$ entonces

$$\int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}_h) = \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\Pi_h(\hat{\mathbf{v}})) = \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}^*) = \|q_h\|_{0,2}^2.$$

Por último, dado que $\|\hat{\mathbf{v}}\|_{0,3} \leq C \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,2}$ con $C > 0$ y teniendo en cuenta (2.2.24) entonces

$$\|\hat{\mathbf{v}}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C (\|\hat{\mathbf{v}}\|_{0,3} + \|\operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}})\|_{0,2}) \leq C \|\operatorname{div}(\mathbf{v}^*)\|_{0,2} \leq C \|q_h\|_{0,2},$$

por lo que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}} \frac{\int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}}} \geq \frac{\int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}_h)}{\|\hat{\mathbf{v}}_h\|_{\mathcal{H}}} \geq \frac{\|q_h\|_{0,2}^2}{C \|q_h\|_{0,2}} = \frac{1}{C} \|q_h\|_{0,2} = \beta_h \|q_h\|_{0,2} \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.2. *La formulación variacional (2.2.19) tiene solución única $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$, y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{u}_h\|_{0,2}^2 + \|\mathbf{u}_h\|_{0,3}^3 + \|\operatorname{div}(\mathbf{u}_h)\|_{0,2}^2 \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,2}^2$$

$$\|p_h\|_{0,2} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{0,2} + \|\mathbf{f}\|_{0,2}^2)$$

La demostración de este teorema se hace de forma similar a lo hecho para el problema continuo.

Teorema 2.2.3. *Sea $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{H}_0 \times Q$ la solución de (2.2.5) y $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ la solución de (2.2.19). Si $(\mathbf{u}, p) \in [\mathbf{W}^{s,3}(\Omega)]^n \times \mathbf{W}^{s,3/2}(\Omega)$, entonces existe una constante C independiente de h tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,2}^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,3}^3 \leq Ch^{2s}, \quad 1 \leq s \leq k+1$$

$$\|p - p_h\|_{0,2} \leq Ch^s \quad 1 \leq s \leq k+1$$

La prueba de este teorema se puede ver en detalle en [21, 39]

2.2.6. Implementación

Sea $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$ una base para H_h , con N número de lados en \mathcal{T}_h y sea $\{\varphi_l\}_{l=1}^L$ una base L_h , tal que $\varphi_l = 1$ en el elemento l y cero en otra parte. Aquí, L representa el número de elementos en \mathcal{T}_h . Las aproximaciones para la velocidad y para la presión están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i, \\ p_h &= \sum_{i=1}^L \eta_i \varphi_i \end{aligned}$$

tal y como se vió en el capítulo 1. Sea

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{\mu}{k\rho} + \frac{\hat{\beta}}{\rho} |\mathbf{u}|$$

tal que $\mathbf{A}\mathbf{u}_h = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}_h)\mathbf{u}_h$, entonces es claro que $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}_h)\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h = (\mathbf{A}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$. Así la formulación variacional discreta (2.2.19) se puede expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}(\vec{\alpha}) & -\mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.2.25)$$

Claramente se observa que (2.2.25) es un sistema no lineal, por lo que es necesario implementar un método iterativo para resolverlo. En [39], los autores proponen el siguiente esquema iterativo de punto fijo para resolver (2.2.25).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado un } \mathbf{u}_h^0 \in H_h \text{ cualquiera, encontrar } (\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in H_h \times Q_h \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}_h^m) \mathbf{u}_h^{m+1} \cdot \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h^{m+1} \text{div}(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_D} p_D(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{v}_h \in H_h \\ - \int_{\Omega} q_h \text{div}(\mathbf{u}_h^{m+1}) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{array} \right. \quad (2.2.26)$$

Visto de manera matricial, dado $\vec{\alpha}^{(0)}$ Hallar $\vec{\alpha}^{(m+1)}, \vec{\eta}^{(m+1)}$, tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}(\vec{\alpha}^{(m)}) & -\mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha}^{(m+1)} \\ \vec{\eta}^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Este algoritmo es lineal, por lo que un método iterativo como el de Newton no es necesario. Sin embargo, el análisis de convergencia del mismo aún está bajo consideración [39].

Teniendo en cuenta el desarrollo anterior y las bases finito dimensionales para los espacios arriba mencionados, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a(\Psi_i, \Psi_j) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \Psi_i \cdot \Psi_j + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \Psi_i \right| \Psi_i \cdot \Psi_j \\
&= \frac{\mu}{k\rho} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left| \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \Psi_i^K \right| \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K \\
b(\Psi_i, \varphi_l) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\Psi_i) \varphi_l = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(\Psi_i^K) \varphi_l^K \\
F(\Psi_j) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_j + \int_{\Gamma_D} p_D(\Psi_j \cdot \mathbf{n}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \Psi_j^K + \sum_{E \subset \Gamma_D} \int_E p_D(\Psi_j^K \cdot \mathbf{n}),
\end{aligned}$$

donde Ψ_j^K y φ_l son las respectivas funciones básicas para cada triángulo K .

Comentario 2.2.2. Las propiedades de las funciones Ψ_j^K son explicadas en la sección 2.3 del Capítulo 1.

La forma para Ψ_j^K está dada por (1.2.39). La matriz $\mathbf{D}^{-1}(\vec{\alpha}^{(n)})$ puede escribirse como la suma de dos matrices

$$\mathbf{D}^{-1}(\vec{\alpha}^{(n)}) = \mathbf{A}_1 + \frac{\hat{\beta}}{\rho} \mathbf{A}_2.$$

Teniendo en cuenta (1.2.39) las componentes de la matriz \mathbf{A}_1^K están dados por (1.2.41), por tanto la matriz correspondiente es como en (1.2.41). Por su parte, las componentes de la matriz \mathbf{A}_2^K están dados por

$$A_{2ij}^K = \int_K \left| \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \Psi_i^K \right| \Psi_i^K \cdot \Psi_j^K = \sigma_i \sigma_j \frac{|E_i| |E_j|}{4|K|^2} \int_K \left| \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \frac{|E_i| \sigma_i}{2|K|} (X - P_i) \right| (X - P_i) \cdot (X - P_j).$$

Utilizando la cuadratura de integración numérica de un solo punto (baricentro de los triángulos), la expresión anterior se puede escribir como

$$A_{2ij}^K = \sigma_i \sigma_j \frac{|E_i| |E_j|}{8|K|^2} \left| \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K |E_i| \sigma_i (\text{bar} - P_i) \right| (\text{bar} - P_i) \cdot (\text{bar} - P_j).$$

Sea

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \text{bar} - P_1 & \text{bar} - P_2 & \text{bar} - P_3 \\ \text{bar} - P_1 & \text{bar} - P_2 & \text{bar} - P_3 \\ \text{bar} - P_1 & \text{bar} - P_2 & \text{bar} - P_3 \end{bmatrix}_{6 \times 3},$$

y

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} |E_1| \sigma_1 & & \\ & |E_2| \sigma_2 & \\ & & |E_3| \sigma_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

La matriz \mathbf{A}_2^K está dada por

$$\mathbf{A}_2^K = \frac{\left| \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \sigma_i |E_i| (\bar{p} - P_i) \right|}{24|K|^2} \mathbf{Q}_{3 \times 3} \mathbf{V}_{3 \times 6}^t \mathbf{V}_{6 \times 3} \mathbf{Q}_{3 \times 3}.$$

Por otro lado, la matriz local \mathbf{B}^K está dado por (1.2.42), mientras que el vector local F^K está dado por las ecuaciones (1.2.43) y (1.2.44), descritos en la primera sección del Capítulo 1.

2.3. Experimentos Numéricos

En la presente sección se muestran algunos resultados numéricos obtenidos al solucionar la ecuación de Darcy no lineal implementado el método de elementos finitos mixtos, en caso particular en que el término de permeabilidad dependa de la presión, como se estudió en la primera parte de este capítulo. También, se muestran resultados al solucionar la ecuación de Darcy-Forchheimer para algunos ejemplos en particular.

2.3.1. Ejemplo 1 ($\kappa(p)$ Acotado)

Considere el siguiente problema.

Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial\Omega : x = 1\} \cup \{(x, y) \in \partial\Omega : y = 1\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. El término de la permeabilidad está dado por

$$\kappa(p) = 1 + \frac{1}{1 + p^2},$$

donde es fácil verificar que $1 \leq \kappa(p) \leq 2$. Los términos para el lado derecho de la formulación (2.1.1) están determinados por la solución exacta

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad p = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

Los resultados obtenidos usando (2.1.19), utilizando a $(\mathbf{u}_h^{(0)}, p_h^{(0)}) = (0, 0)$ como dato de inicio se muestran a continuación:

El criterio de parada utilizado para estimar la convergencia de (2.1.19) fue

$$\frac{\sqrt{\left\| \mathbf{u}_h^{(n+1)} - \mathbf{u}_h^{(n)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| p_h^{(n+1)} - p_h^{(n)} \right|_{H^1(\Omega)}^2}}{\sqrt{\left\| \mathbf{u}_h^{(n+1)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| p_h^{(n+1)} \right|_{H^1(\Omega)}^2}} \leq 10^{-10}. \quad (2.3.1)$$

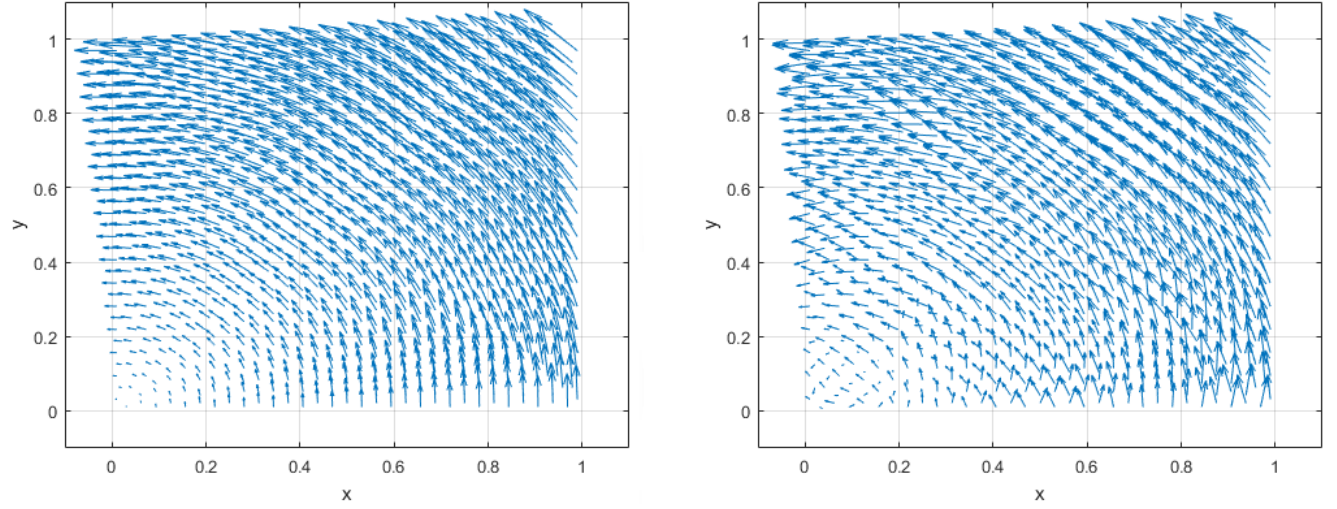


Figura 2.3.1: Campo de velocidad Exacto (izq) vs Aproximado (der) Darcy- $\kappa(p)$ Exponencial
Elementos= 1024, $h = 0,0625$

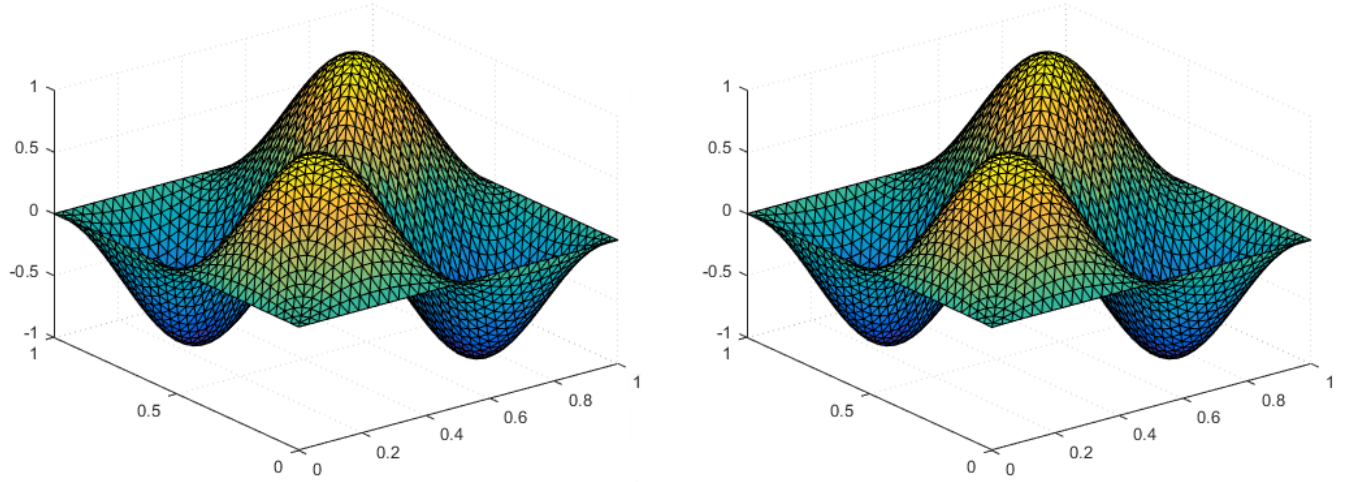


Figura 2.3.2: Solución Aproximada p_h (izq) vs Solución Exacta p (Der)

MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 4096 Elementos, $h = 0,0313$

A continuación se muestra la tabla de errores tanto para la presión p y la velocidad \mathbf{u} , en las normas respectivas, indicando el orden de convergencia calculado con (1.5.1) y las iteraciones correspondientes hasta satisfacer el criterio de parada.

h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden	Iteraciones
0.5	0.1180	*	0.0193	*	2.9620	*	7
0.25	0.5188	-2.1366	0.1130	-2.5518	1.8781	0.6573	7
0.125	0.3080	0.7521	0.0305	1.8895	0.9879	0.9268	8
0.0625	0.1615	0.9319	0.0078	1.9644	0.5011	0.9794	8
0.0312	0.0818	0.9818	0.0020	1.9904	0.2515	0.9945	8
0.0156	0.0410	0.9953	0.0005	1.9975	0.1259	0.9986	8
0.0078	0.0205	0.9988	0.0001	1.9994	0.0630	0.9996	8

Tabla 2.3.1: Errores de la solución aproximada
MFEM $(\mathbf{u}, p) \in [L^2(\Omega)]^2; \Omega \times H^1(\Omega)$ (Darcy no lineal $\kappa(p)$ Acotado)

El comportamiento de la convergencia del algoritmo iterativo (2.1.19) para cada malla teniendo en cuenta el criterio de parada (2.3.1) se muestra mediante el siguiente gráfico.

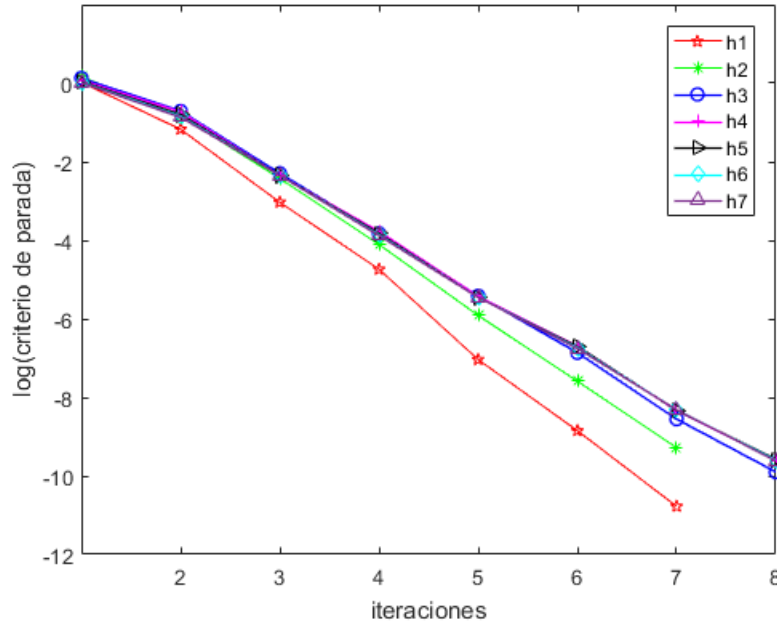


Figura 2.3.3: Convergencia del algoritmo (2.2.26) respecto al tamaño de la malla

2.3.2. Ejemplo 2 ($\kappa(p)$ Exponencial)

Considere el siguiente problema.

Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial\Omega : x = 1\} \cup \{(x, y) \in \partial\Omega : y = 1\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. El término de la permeabilidad está dado por

$$\kappa(p) = e^{p/2},$$

Es claro que $\kappa(p)$ no es acotada y de tipo exponencial, por lo que la estrategia a utilizar es la presentada en la sección 2 del presente capítulo. Los términos para el lado derecho de la formulación (2.1.12) están determinados por la solución exacta

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -y^3 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad p = 2 + \sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, primero se debe encontrar q_h que soluciona el problema (2.1.35). Los resultados se muestran a continuación.

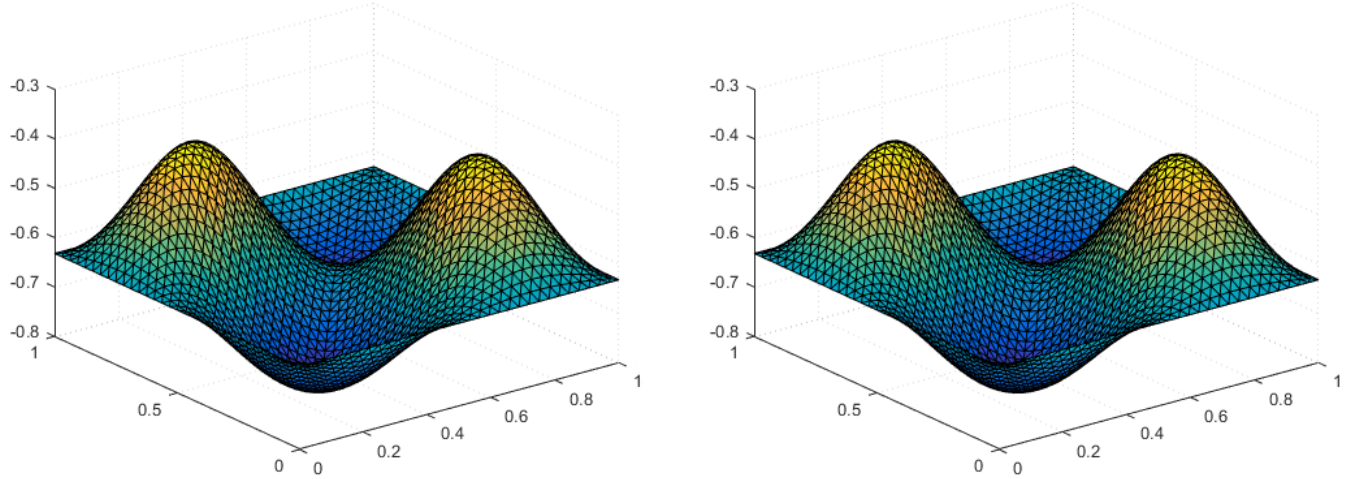


Figura 2.3.4: q (Izq) vs q_h (Der)
PFEM $q_h \in \mathbb{P}_1(K)$ - Malla: 4096 Elementos, $h = 0,0313$

Elementos	h	$\ q - q_h\ _{L^\infty(\Omega)}$	Orden
16	0.5	0.1487	*
64	0.25	0.3804	-1.3547
256	0.125	0.2211	0.7828
1024	0.0625	0.1152	0.9410
4096	0.0313	0.0582	0.9845
16384	0.0156	0.0292	0.9957
65536	0.0078	0.0146	0.9989

Tabla 2.3.2: Errores de la solución aproximada q_h
PFEM $q_h \in \mathbb{P}_1(K)$

Una vez calculado q_h , se calcula $\hat{\kappa}_h$ con (2.1.36). Por último, usando el método de elementos finitos mixtos, se busca a $(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h)$ que resuelve el problema (2.1.37). Los resultados para la velocidad \mathbf{u} y la presión p , al igual que la respectiva tabla de errores, indicando el orden de convergencia calculado con (1.5.1), se muestran a continuación.

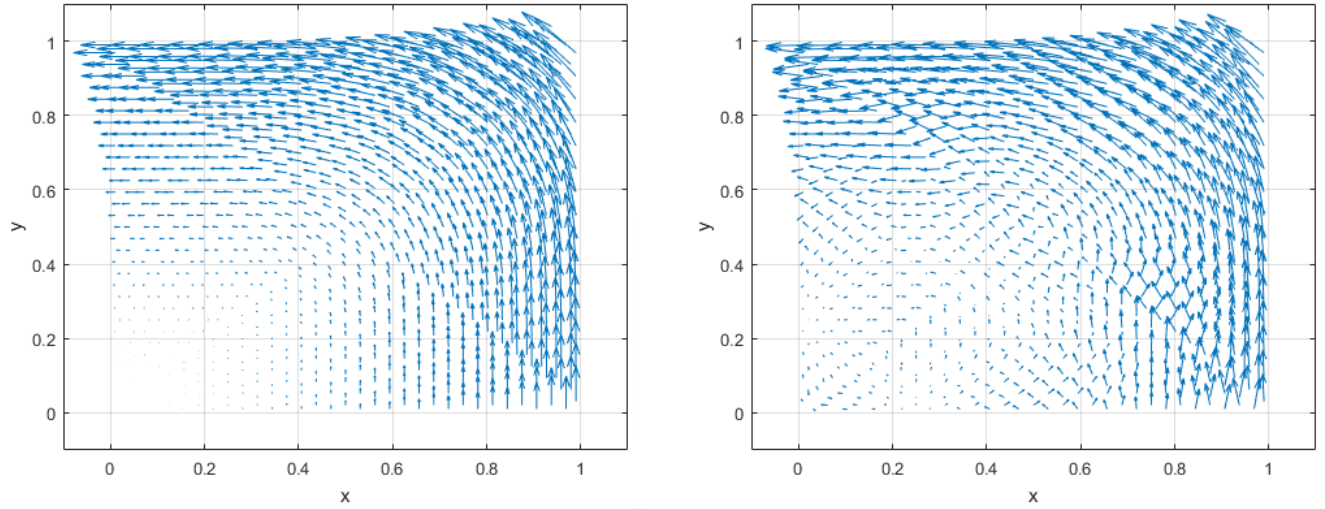


Figura 2.3.5: Campo de velocidad Exacto (izq) vs Aproximado (der) Darcy- $\kappa(p)$ Exponencial
Elementos= 1024, $h = 0,0625$

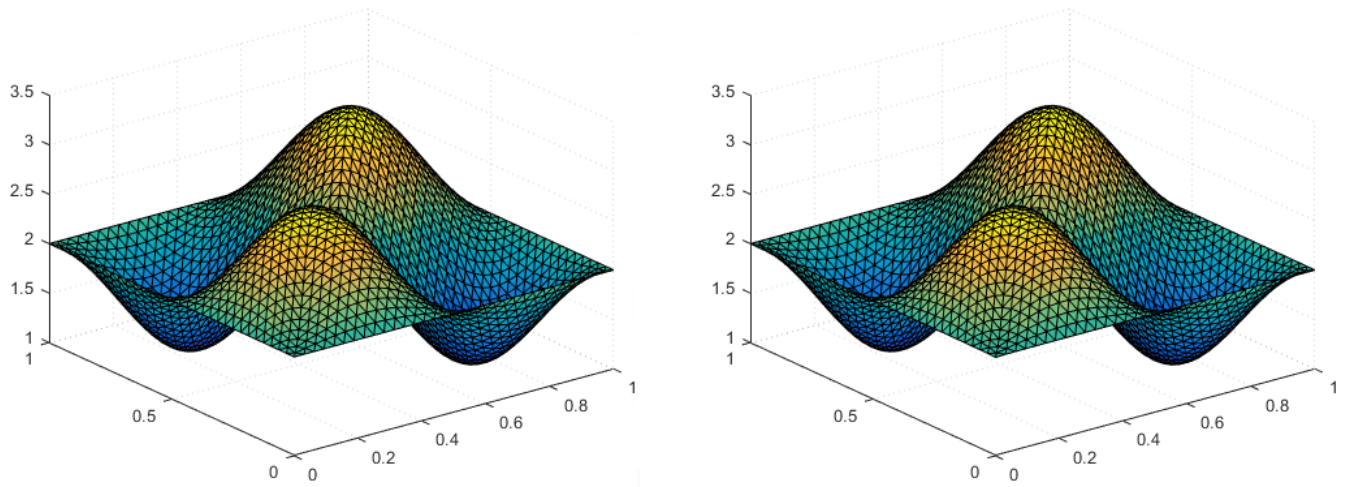


Figura 2.3.6: Solución Aproximada p_h (izq) vs Solución Exacta p (Der)
MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \times \mathbb{P}_1(K)$
Malla: 4096 Elementos, $h = 0,0313$

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
16	0.5	0.1492	*	0.0195	*	2.9620	*
64	0.25	0.3780	-1.3408	0.1118	-2.5182	1.8791	0.6565
256	0.125	0.2204	0.7781	0.0301	1.8919	0.9881	0.9274
1024	0.0625	0.1150	0.9381	0.0077	1.9668	0.5011	0.9795
4096	0.0313	0.0582	0.9834	0.0019	1.9910	0.2515	0.9946
16384	0.0156	0.0292	0.9957	0.0005	1.9977	0.1259	0.9986
65536	0.0078	0.0146	0.9989	0.0001	1.9994	0.0630	0.9996

Tabla 2.3.3: Errores de la solución aproximada
MFEM $(\mathbf{u}, p) \in [L^2(\Omega)]^2; \Omega \times H^1(\Omega)$ (Darcy no lineal $\kappa(p)$ Exponencial)

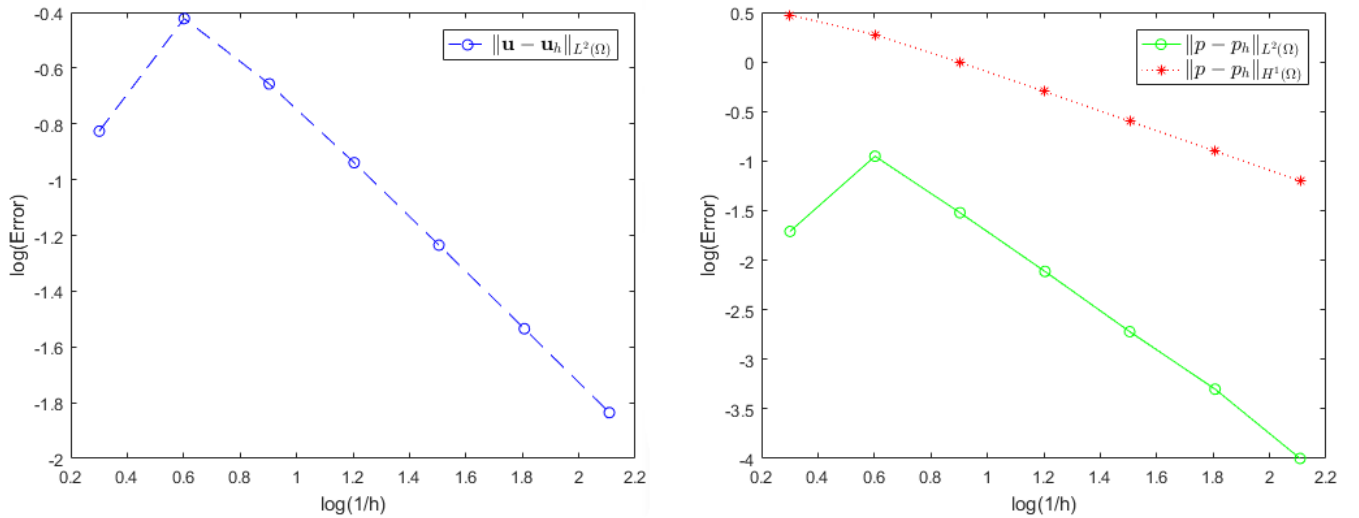


Figura 2.3.7: Convergencia del error para $(\mathbf{u}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \mathbb{P}_1(K)$

2.3.3. Ejemplo 3 (Darcy Forchheimer)

Considere el siguiente problema.

Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, con frontera Γ totalmente Dirichlet homogénea. Por simplicidad se considerará la permeabilidad $k = 1$ y $\hat{\beta} = 1$. La solución exacta para este problema está dado por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \end{bmatrix}, \quad p = (x - x^2)(y - y^2),$$

por lo que el término de fuerzas de volumen, teniendo en cuenta la ecuación de Darcy-Forchheimer es

$$\mathbf{f} = \left(k + \hat{\beta} \sqrt{(e^x \sin(y))^2 + e^x \cos(y)^2} \right) \begin{bmatrix} e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - 2x)(y - y^2) \\ (x - x^2)(1 - 2y) \end{bmatrix}$$

Para solucionar el problema, se utilizó el algoritmo descrito por (2.2.26), usando como semilla $(\mathbf{u}_h^{(0)}, p_h^{(0)}) = (0, 0)$. El criterio de parada tenido en cuenta en este caso fue

$$\max \left(\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{(n+1)} - \mathbf{u}_h^{(n)} \\ p_h^{(n+1)} - p_h^{(n)} \end{bmatrix} \right\| \right) \leq \epsilon$$

Los resultados obtenidos y la tabla de errores se muestran a continuación.

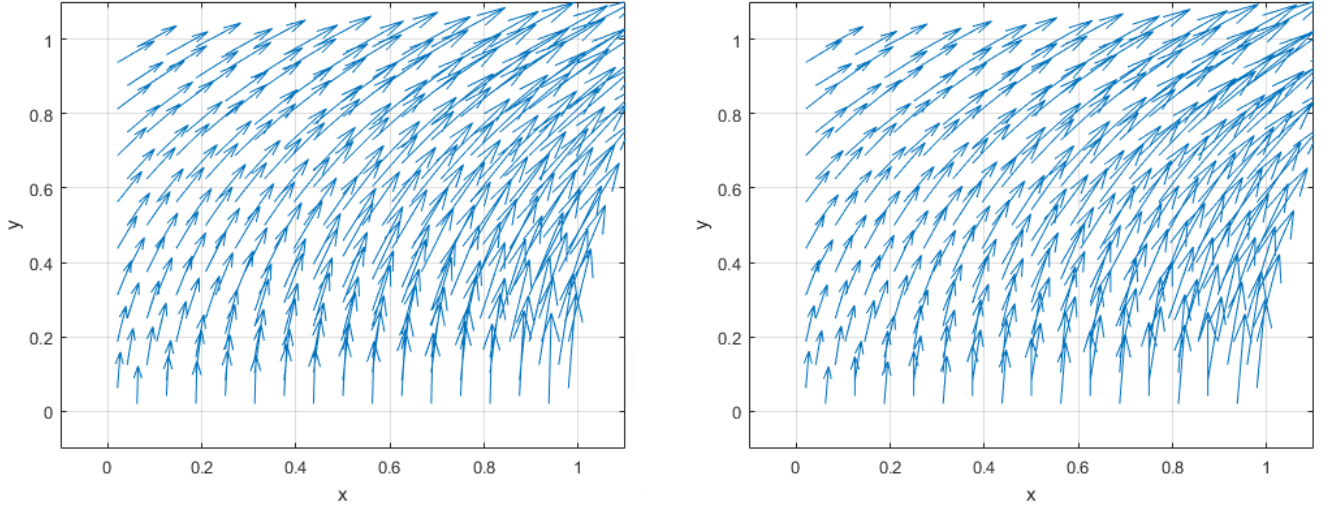


Figura 2.3.8: Campo de velocidad Exacto (izq) vs Aproximado (der) Darcy-Forchheimer
Elementos= 256, $h = 0,125$

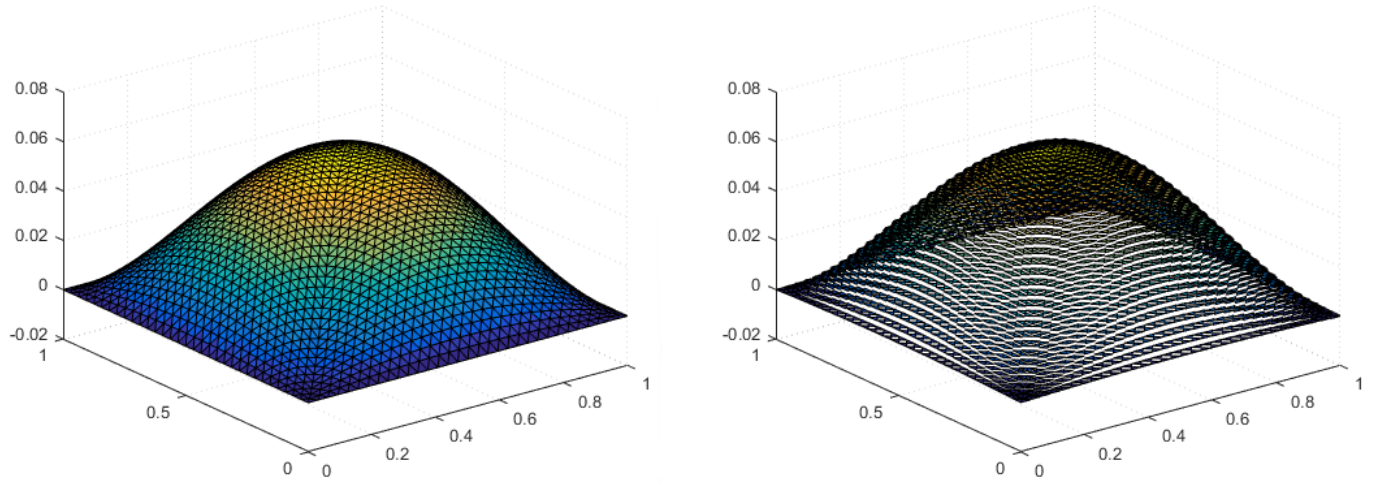


Figura 2.3.9: Solución Aproximada p_h (izq) vs Solución Exacta p (Der)
MFEM $(\mathbf{u}_h, p_h) \in RT_0(K) \times \mathbb{P}_0(K)$
Malla: 4096 Elementos, $h = 0,0313$

h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H(\text{div}; \Omega)}$	Orden	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{[L^3(\Omega)]^2}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	Iteraciones
0.5	0.2609	*	0.2710	*	0.0294	*	37
0.25	0.1321	0.9813	0.1378	0.9756	0.0084	1.8004	40
0.125	0.0663	0.9945	0.0692	0.9945	0.0029	1.5204	42
0.0625	0.0332	0.9984	0.0346	0.9988	0.0013	1.2225	43
0.0313	0.0166	0.9995	0.0173	0.9997	0.0006	1.0685	44
0.0156	0.0083	0.9999	0.0087	0.9999	0.0003	1.0182	45
0.0078	0.0042	1.0000	0.0043	1.0000	0.0001	1.0046	45

Tabla 2.3.4: Errores de la solución aproximada
MFEM $(\mathbf{u}, p) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ (Darcy-Forchheimer)

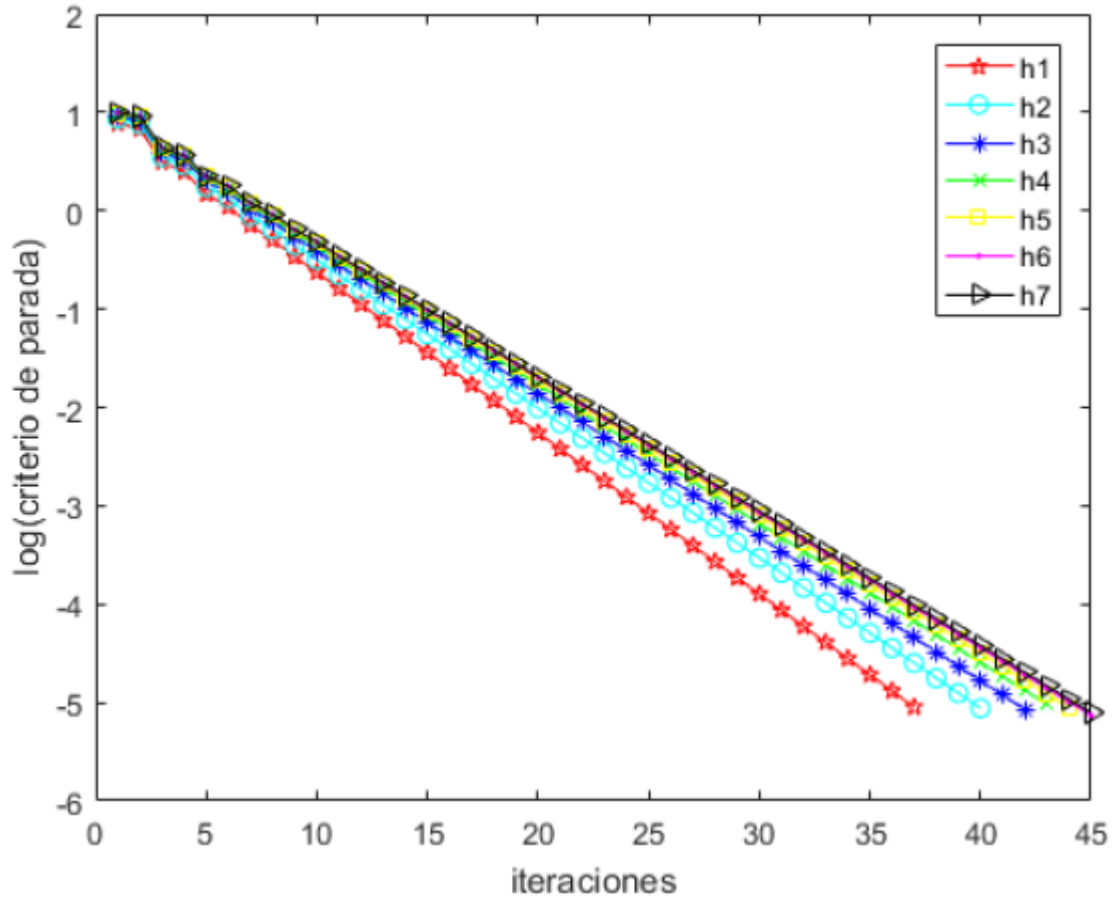


Figura 2.3.10: Convergencia del algoritmo iterativo

Capítulo 3

Geomecánica

3.1. Generalidades

La geomecánica o mecánica de rocas, es la ciencia teórica y aplicada que estudia las respuestas de las rocas a los campos de fuerzas de su entorno físico [35]. A continuación se hace una breve descripción de algunos conceptos importantes para el estudio y análisis que permiten conocer el estado de esfuerzos y de deformación de un cuerpo.

3.1.1. Esfuerzos

Una fuerza que actúa sobre un área determinada se conoce como esfuerzo σ [1]. Estos son independientes del tamaño y forma del cuerpo y por convención los esfuerzos compresivos se consideran positivos [31].

$$\sigma = \frac{Fuerza}{Area} = \frac{F}{A}$$

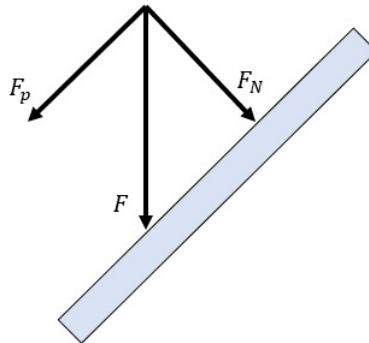


Figura 3.1.1: Descomposición de la fuerza sobre un plano inclinado

Si se define un plano imaginario en el interior del cuerpo, las fuerzas que actúan sobre éste deben balancearse independientemente de la orientación del plano [1]. Por lo que si un cuerpo en equilibrio es sometido a un esfuerzo, con tal de mantener dicho estado, este responde con otro esfuerzo de igual magnitud en sentido contrario (tercera ley de Newton). Teniendo en cuenta la descomposición de la fuerza actuante sobre un cuerpo, se definen dos tipo de esfuerzos. Los esfuerzos normales σ_N , son aquellos donde la fuerza es aplicada de manera perpendicular a la superficie, y los esfuerzos de cizalla τ_{Nd} , son aquellos donde la fuerza es ejercida de forma paralela a dicha superficie (N indica el plano normal sobre el cual actúa la fuerza y d la dirección).

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A} \quad \tau = \frac{F_p}{A}.$$

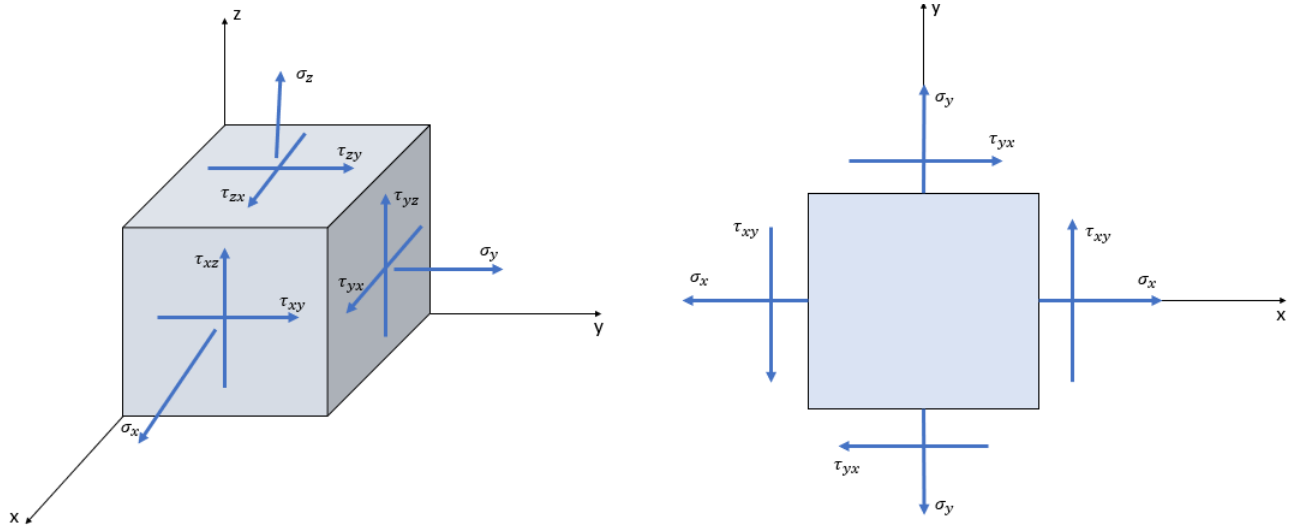


Figura 3.1.2: Distribución de esfuerzos normales y de cizalla sobre las caras de un cubo

El tensor de esfuerzos σ para el caso 3D está dado por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Si se considera equilibrio de momentos (fuerzas rotacionales nulas) sobre los tres ejes de un cubo, entonces se tiene que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

A menudo ocurre que cada componente del tensor de esfuerzos varía en magnitud de un punto a otro dentro de un cuerpo. Si este es el caso, entonces un elemento estará en equilibrio si se tiene en cada una de las direcciones que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_{vx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_{vy} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{vz} &= 0, \end{aligned}$$

ver [31]. Finalmente las anteriores ecuaciones se pueden escribir de forma vectorial como

$$\mathbf{div}(\sigma) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0}, \quad (3.1.1)$$

donde \mathbf{f}_v es el vector de las fuerzas de volumen.

3.1.2. Deformación

Cuando un cuerpo es sometido a una carga, éste se deforma. La deformación es definida como los cambios en la posición relativa de los puntos en el sólido. Ésta depende del tamaño de la estructura y de los esfuerzos aplicados sobre ella [31]. Cuando la deformación solo es longitudinal se denomina elongación y se representa como

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_o},$$

donde Δl es cambio de la medida longitudinal de un objeto y l_o es la medida longitudinal del objeto original; esta relación solo es válida para pequeñas deformaciones. Por otro lado si la deformación es angular, se conoce como deformación por cizalla y determina

$$\gamma = \frac{1}{2} \tan(\psi)$$

donde ψ es ángulo entre la posición original y la posición final. Similarmente, el tensor de deformación está dado por

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix},$$

donde cada componente esta determinado por

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.1.2)$$

con u_d como el desplazamiento del material en la dirección d . De la definición anterior se tiene que

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \quad (3.1.3)$$

Sea \mathbf{u} el vector de desplazamientos. Es fácil verificar que el tensor de deformaciones ϵ en función de \mathbf{u} esta dado por la siguiente expresión:

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t). \quad (3.1.4)$$

3.1.3. Relación entre Esfuerzo y Deformación

El esfuerzo y la deformación se relacionan a través de la ley de Hook [37], la cual establece que la deformación que experimenta un cuerpo es proporcional al esfuerzo aplicado sobre él. En una dimensión se tiene que

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma,$$

con constante de proporcionalidad $\frac{1}{E}$, donde E es el denominado modulo de Young [37]. Aplicando la ecuación de Hook para el caso 3D y material isotrópico, las componentes del tensor de elasticidad quedan determinadas por:

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} (\sigma_{ii} - v (\sigma_{jj} + \sigma_{kk})) \quad \text{con } i \neq j \neq k \quad (3.1.5)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{(1+v)}{E} \sigma_{ij} \quad \text{con } i \neq j, \quad (3.1.6)$$

donde v es conocido como la relación de Poisson, la cual se define como la relación entre la deformación transversal y la deformación longitudinal bajo condiciones de esfuerzos uniaxiales [32], es decir

$$v = -\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}.$$

Tanto E como v son parámetros positivos e intrínsecos de cada material.

Se definen ahora las llamadas constantes de Lamé λ y G [37] como

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}, \quad G = \frac{E}{2(1+v)}. \quad (3.1.7)$$

Sea $\epsilon_v = Tr(\epsilon(\mathbf{u})) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.1.5), (3.1.6) y (3.1.7), y resolviendo para cada componente del tensor de esfuerzo, se llega a que

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_v\delta_{ij}, \quad (3.1.8)$$

de donde se tiene entonces que

$$\sigma = \mathbf{C}\epsilon(\mathbf{u}) = 2G\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda Tr\epsilon(\mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (3.1.9)$$

donde \mathbf{C} es conocida como la matriz de elasticidad.

3.2. Formulación del problema

Teniendo en cuenta la teoría de poroelasticidad desarrollada por Biot [10], el esfuerzo efectivo σ_{ef} ejercido sobre un cuerpo sólido, poroso y saturado de fluidos, está dado por

$$\sigma_{ef} = \sigma - \alpha p \mathbf{I},$$

donde σ es el tensor de esfuerzos que actúa sobre el material, p es la presión de poro ejercida por los fluidos, α es el coeficiente de Biot e \mathbf{I} es la matriz identidad. La ecuación de equilibrio de esfuerzos (3.1.1) se transforma en

$$-\mathbf{div}(\sigma) = \mathbf{f}_v + \alpha \nabla p.$$

En este caso se va a considerar a la presión p como un dato conocido, proveniente de algún tipo de simulador de flujo, por lo que se puede hacer $\mathbf{f} = \mathbf{f}_v + \alpha \nabla p$. Considerando las respectivas

condiciones de fronteras impuesta en el dominio de trabajo $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = \{2, 3\}$, la formulación fuerte del problema geomecánico en función del desplazamiento del material \mathbf{u} , dadas $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma_N)]^n$ es:

$$(PF) \left\{ \begin{array}{lll} \text{Hallar } \mathbf{u} & \text{tal que} & : \\ -\mathbf{div}(\sigma(\mathbf{u})) = \mathbf{f} & \text{en} & \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sobre} & \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sobre} & \Gamma_D. \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Se definen los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} [H_{0D}^1(\Omega)]^n &= \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^n : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\} \\ [H_{\mathbf{u}_D}^1(\Omega)]^n &= \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^n : \mathbf{v} = \mathbf{u}_D \text{ en } \Gamma_D\}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Multiplicando la ecuación diferencial de (3.2.1) por una función $\mathbf{v} \in [H_{0D}^1(\Omega)]^n$ e integrando, se encuentra una formulación variacional del problema fuerte, de la forma

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.2.3)$$

Usando identidades de Green

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

donde $:$ denota el producto tensorial definido como

$$\sigma : \tau = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \tau_{ij}.$$

Por lo que la formulación variacional en forma primal de (3.2.1) usando (3.1.9) está dada por

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \mathbf{u} \in [H_{\mathbf{u}_D}^1(\Omega)]^n \text{ tal que :} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{C}\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v})}_{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}_{F(\mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in [H_{0D}^1(\Omega)]^n. \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

Comentario 3.2.1. $\nabla \mathbf{v} \neq \epsilon(\mathbf{v})$, sin embargo, operacionalmente es fácil mostrar que para cualquier tensor simétrico τ se tiene que $\tau : \nabla \mathbf{v} = \tau : \epsilon(\mathbf{v})$ siguiendo la definición (3.1.4). Ésta adecuación a la formulación variacional para el problema de elasticidad, se encuentra presente en toda la bibliografía relacionada.

3.3. Existencia y unicidad

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se trabajará para el caso con frontera Dirichlet homogénea. El teorema de Lax-Milgram descrito en detalle en [24] dice que si en la formulación variacional (3.2.4) $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, acotada y coerciva y $F(\cdot)$ es un funcional lineal y acotado, entonces se garantiza la existencia y unidad de la solución, además de la dependencia continua de los datos.

Por un lado, dadas las características de a , claramente es una forma bilineal. Además teniendo en cuenta la ecuación (3.1.9) y además que $Tr(\epsilon(\mathbf{u})) = \text{div}(\mathbf{u})$ se tiene que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda Tr(\epsilon(\mathbf{u}))\mathbf{I}] : \epsilon(\mathbf{v}) \\ &= \int_{\Omega} 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \lambda \text{div}(\mathbf{u})\mathbf{I} : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, cuando se trabaja en tres dimensiones, operando los términos de la segunda integral,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \text{div}(\mathbf{u})\mathbf{I} : \nabla \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \lambda \begin{bmatrix} \text{div}(\mathbf{u}) & 0 & 0 \\ 0 & \text{div}(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & 0 & \text{div}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \int_{\Omega} \lambda \text{div}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \\ &= \int_{\Omega} \lambda \text{div}(\mathbf{u}) \text{div}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

por lo que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \lambda \text{div}(\mathbf{u}) \text{div}(\mathbf{v}).$$

Por tanto, usando desigualdad triangular, la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta $\|\epsilon(\mathbf{u})\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}$ (similarmente, $\|\text{div}(\mathbf{u})\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}$), entonces

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq 2|\mu| \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + |\lambda| \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \max\{2|\mu|, |\lambda|\} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Por lo anterior, la forma bilineal a es acotada siempre y cuando los parámetros Lamé sean acotados. Un caso particular en el cual la condición anterior no se cumple, se presenta en materiales incompresibles, ya que $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ y por definición $\lambda \rightarrow \infty$ [46]. Para verificar la coercividad, se sigue de las desigualdades de Korn descritas en [12], de donde se obtiene que

$$\|\epsilon(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \geq C \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in [H_{0D}^1(\Omega)]^n. \quad (3.3.1)$$

Por lo anterior se tiene que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2|\mu| \|\epsilon(\mathbf{u})\|_{0,\Omega}^2 + |\lambda| \|\text{div}(\mathbf{u})\|_{0,\Omega}^2 \geq C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in [H_{0D}^1(\Omega)]^n$$

Cuando Γ es Neumann pura, para que el problema de elasticidad tenga solución única, se debe satisfacer la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} dX + \int_{\Gamma} \mathbf{g} ds = 0, \quad (3.3.2)$$

como se menciona en [20, 41].

Por otro lado, F claramente es un funcional lineal. Además por desigualdad triangular y empleando el teorema de la desigualdad de traza abordado en [24], se tiene que:

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{v})| &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right| + \left| \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \right| \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{-1/2,\Gamma_N} \|\mathbf{v}\|_{1/2,\Gamma_N} \\ &\leq \hat{C} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

De todo el análisis anterior, se pudo evidenciar que la formulación variacional (3.2.4), bajo las suposiciones establecidas, satisface las condiciones del teorema de Lax-Milgram, por lo que se garantiza la existencia y unicidad de su solución, además de la dependencia continua de los datos.

3.4. Discretización por elementos finitos

Para la implementación, la formulación variacional (3.2.4) se discretiza utilizando el método de Galerkin [30]. Sea \mathbf{H}_h un subespacio finito dimensional de $[H^1(\Omega)]^n$. Sea $\mathbf{H}_{0h} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h : \mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$ y además sea $\mathbf{H}_{U_{Dh}} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h : \mathbf{v}_h = \mathbf{u}_D \text{ en } \Gamma_D\}$ entonces la formulación variacional discreta se puede escribir como:

$$(FVD) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_{U_{Dh}} \text{ tal que :} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon(\mathbf{u}_h) : \epsilon(\mathbf{v}_h)}_{a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h}_{F(\mathbf{v}_h)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_{0h} \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

Sea \mathcal{T}_h una partición regular de $\Omega \in \mathbb{R}^3$ con frontera poligonal Γ tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ donde los elementos T son tetraedros, $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \bar{\Gamma}$ y $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Además $\mathcal{N} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ el conjunto de todos los nodos en \mathcal{T}_h y sean $\{\Psi_k\}_{k=1}^{3N} = \{\varphi_1 e_1, \varphi_1 e_2, \varphi_1 e_3, \dots, \varphi_N e_1, \varphi_N e_2, \varphi_N e_3\}$ las funciones bases tales que φ_k son funciones sombreros lineales, es decir

$$\varphi_k(X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j, \end{cases}$$

además

$$\varphi_k(X) = a_k x + b_k y + c_k z + d_k.$$

Sea $\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{3N} \alpha_j \Psi_j$, entonces la formulación variacional discreta (3.4.1) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon \left(\sum_{j=1}^{3N} \alpha_j \Psi_j \right) \epsilon(\Psi_k) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_k + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \Psi_k \quad k = 1, \dots, 3N, \\ \sum_{j=1}^{3N} \left(\int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon(\Psi_j) : \epsilon(\Psi_k) \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_k + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \Psi_k \quad k = 1, \dots, 3N. \end{aligned}$$

Las entradas de la matriz de rigidez global $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$ y del vector de carga están determinadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_{k,j} &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon(\Psi_j) : \epsilon(\Psi_k), \\ b_k &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Psi_k + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \Psi_k. \end{aligned}$$

Comentario 3.4.1. *La existencia y unicidad de la formulación variacional discreta (3.4.1) está sustentada en la existencia y unicidad de la formulación variacional continua (3.2.4), ya que las condiciones del teorema de Lax-Milgram para formulaciones de elementos finitos en forma primal se conservan.*

El manejo y organización de los datos provenientes de la malla de tetraedros está especificado en [5, 36].

3.4.1. Análisis de Error

A continuación se presenta el análisis de error para el problema de elasticidad que modela la geomecánica del proceso de recobro mejorado. Para ello se hace uso del lema de Cea descrito en [24, 44], por lo que se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq C \min_{\mathbf{v}_h \in H_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}.$$

Extendiendo el resultado para el error en (1.3.11) para cada una de las componentes de \mathbf{v} , se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq Ch |\mathbf{u}|_{2,\Omega}.$$

Aplicando el truco de Aubin Nitsche [44], en el cual se encuentra un problema adjunto a (3.2.1), es posible mostrar también que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 |\mathbf{u}|_{2,\Omega}.$$

3.5. Implementación

En la práctica, las integrales dadas por la formulación variacional discreta (3.4.1) se calculan como la suma de integrales sobre cada uno de los elementos (tetraedros) teniendo en cuenta que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, entonces

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{C} \epsilon(\mathbf{u}_h) : \epsilon(\mathbf{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \sum_{K \in \Gamma_N} \int_K \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h \quad (3.5.1)$$

donde K son las caras de los elementos (triángulos) sobre Γ .

Utilizando las funciones bases mencionadas en la sección anterior para cada tetraedro, $\{\Psi_k^T\}_{k=1}^{12} = \{\varphi_1^T e_1, \varphi_1^T e_2, \varphi_1^T e_3, \dots, \varphi_4^T e_1, \varphi_4^T e_2, \varphi_4^T e_3\}$, con T indicando el número del tetraedro, y dado que los desplazamientos en cada elemento se puede expresar como $\mathbf{u}_h^T = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j^T \Psi_j^T$, entonces desarrollando (3.5.1), se obtiene que las entradas para las matrices y vectores locales están dadas por

$$\begin{aligned} A_{k,j}^T &= \int_T \mathbf{C} \epsilon(\Psi_j^T) : \epsilon(\Psi_k^T) & \text{así} & & A_{k,j} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A_{k,j}^T \\ b_k^T &= \int_T \mathbf{f} \cdot \Psi_k^T, & b_k^K &= \int_K \mathbf{g} \cdot \Psi_k^T & \text{así} & & b_k &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} b_k^T + \sum_{K \in \Gamma_N} b_k^K. \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación (3.1.2) vista en la primera sección de este capítulo, se define la función $\Upsilon : [H^1(\Omega)]^3 \rightarrow [L^2(\Omega)]^6$, como la representación de Viog descrita en [35] dada por

$$\Upsilon(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\gamma_{xy} \\ 2\gamma_{xz} \\ 2\gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_i / \partial x \\ \partial u_j / \partial y \\ \partial u_k / \partial z \\ \partial u_i / \partial y + \partial u_j / \partial x \\ \partial u_i / \partial z + \partial u_k / \partial x \\ \partial u_j / \partial z + \partial u_k / \partial y \end{bmatrix}.$$

Además, de la definición de las componentes de σ dada en la ecuación (3.1.8)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\gamma_{xy} \\ 2\gamma_{xz} \\ 2\gamma_{yz} \end{bmatrix}}_{\Upsilon(\mathbf{u})}.$$

Por la forma en que opera el producto tensorial y algunas consideraciones hechas anteriormente en (3.1.3), es fácil probar que $\mathbf{C}\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \Upsilon^t(\mathbf{v})\mathcal{X}\Upsilon(\mathbf{u})$. Además

$$\Upsilon(u_h^T) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{1x}^T & 0 & 0 & \varphi_{2x}^T & 0 & 0 & \varphi_{3x}^T & 0 & 0 & \varphi_{4x}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{1y}^T & 0 & 0 & \varphi_{2y}^T & 0 & 0 & \varphi_{3y}^T & 0 & 0 & \varphi_{4y}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{1z}^T & 0 & 0 & \varphi_{2z}^T & 0 & 0 & \varphi_{3z}^T & 0 & 0 & \varphi_{4z}^T \\ \varphi_{1y}^T & \varphi_{1x}^T & 0 & \varphi_{2y}^T & \varphi_{2x}^T & 0 & \varphi_{3y}^T & \varphi_{3x}^T & 0 & \varphi_{4y}^T & \varphi_{4x}^T & 0 \\ \varphi_{1z}^T & 0 & \varphi_{1x}^T & \varphi_{2z}^T & 0 & \varphi_{2x}^T & \varphi_{3z}^T & 0 & \varphi_{3x}^T & \varphi_{4z}^T & 0 & \varphi_{4x}^T \\ 0 & \varphi_{1z}^T & \varphi_{1y}^T & 0 & \varphi_{2z}^T & \varphi_{2y}^T & 0 & \varphi_{3z}^T & \varphi_{3y}^T & 0 & \varphi_{4z}^T & \varphi_{4y}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_{11}^T \\ \alpha_{12}^T \end{bmatrix}.$$

Donde φ_{id}^T representa la derivada parcial de la función φ_i con $i = \{1, 2, 3, 4\}$ con respecto a la variable $d = \{x, y, z\}$ en el tetraedro correspondiente. Teniendo en cuenta todo lo anterior, se tiene que la matriz local para cada tetraedro se puede calcular como

$$A^T = |T|\mathbf{R}^t\mathcal{X}\mathbf{R},$$

donde $|T|$ es el volumen del tetraedro. Por otro lado, empleando la cuadratura para la integración sobre tetraedros [48] usando solo un punto como coordenada baricéntrica, por simplicidad (centroide), es posible calcular las entradas del vector de rigidez local

$$b_k^T = \int_T \mathbf{f} \cdot \Psi_k^T = |T|\mathbf{f}(a) \cdot \Psi_k^T(a),$$

donde $a = \frac{1}{4}[P_1 + P_2 + P_3 + P_4]$ con P_1, P_2, P_3, P_4 vértices del tetraedro. Además usando la cuadratura del baricentro para la integración sobre triángulos [48] se tiene que

$$b_k^K = \int_K \mathbf{g} \cdot \Psi_k^K = |K|\mathbf{g}(\text{bar}) \cdot \Psi_k^K(\text{bar}),$$

donde el baricentro $\text{bar} = \frac{1}{3}[P_1 + P_2 + P_3]$ con P_1, P_2, P_3 vértices del triángulo K sobre la frontera Neumann y $|K|$ como el área de dicho triángulo.

Comentario 3.2: Las condiciones de frontera Dirichlet pueden ser impuestas de manera fuerte por condensación de los datos. El procedimiento detallado puede verse en [5, 36].

3.6. Experimentos Numéricos

En la presente sección se muestran algunos resultados numéricos obtenidos al solucionar el problema de geomecánica asociado a un problema de elasticidad lineal dado por (3.2.1), implementado un método de elementos finitos con formulación variacional primal (3.2.4).

3.6.1. Ejemplo 1

Considere el siguiente problema con frontera Dirichlet homogénea.

Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ y $\partial\Omega = \Gamma_D$. Los parámetros mecánicos del material están dados por $\lambda = 1$ y $\nu = 0,25$. El vector de desplazamiento exacto esta dado por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 200[(x - x^2)^2(2y^3 - 3y^2 + y)(2z^3 - 3z^2 + z)] \\ -100[(y - y^2)^2(2x^3 - 3x^2 + x)(2z^3 - 3z^2 + z)] \\ -100[(z - z^2)^2(2x^3 - 3x^2 + x)(2y^3 - 3y^2 + y)] \end{bmatrix}, \quad (3.6.1)$$

donde $\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0$. El vector de fuerzas de volumen \mathbf{f} es calculado reemplazando (3.6.1) en (3.2.1). La tabla de errores y la gráfica de convergencia, para la solución del problema planteado, usando (3.4.1) se muestran a continuación.

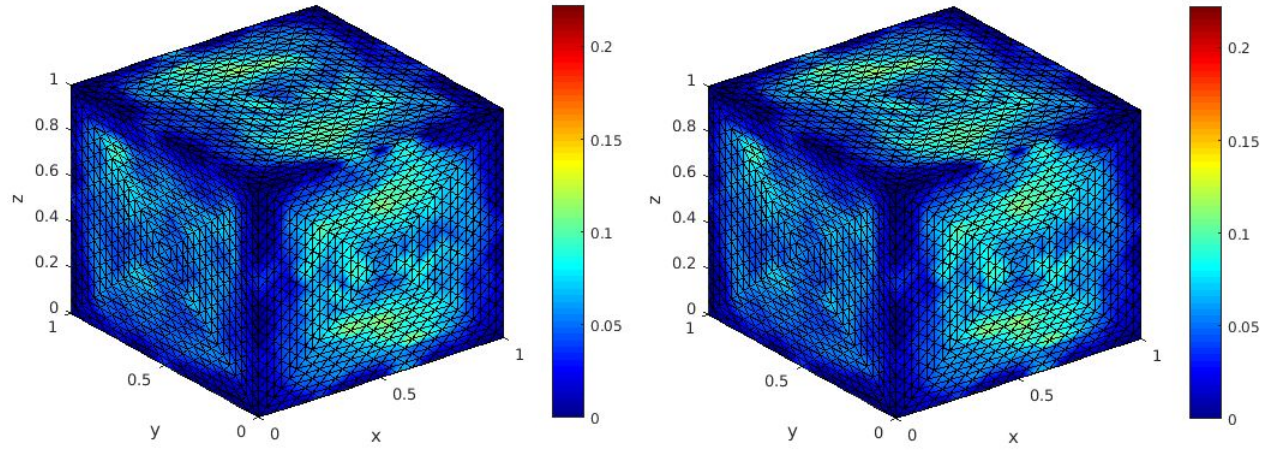


Figura 3.6.1: Desplazamiento Exacto (Izq) vs Aproximado (Der) - Ejemplo 1

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
24	1	0.0369	*	0.3979	*
192	0.6124	0.0382	-0.0699	0.3644	0.1798
1536	0.3953	0.0243	1.0367	0.2590	0.7797
12288	0.2652	0.0120	1.7548	0.1654	1.1225
98304	0.1712	0.0054	1.8498	0.1026	1.0917
786432	0.1148	0.0023	2.0963	0.0642	1.1743

Tabla 3.6.1: Errores de la solución aproximada u_h
PFEM $\mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_1(K)]^3$ - Ejemplo 1

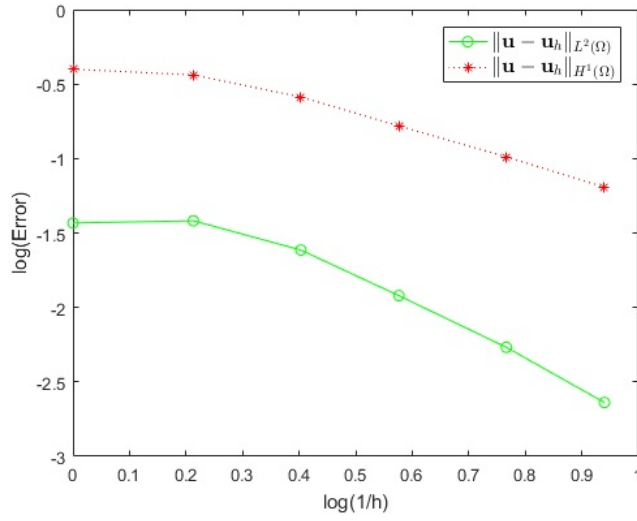


Figura 3.6.2: Convergencia para el desplazamiento $\mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_1(K)]^3$ Ejemplo 1

3.6.2. Ejemplo 2

Considere el siguiente problema con frontera mixta no homogénea.

Sea Ω la región en el espacio como se muestra a continuación:

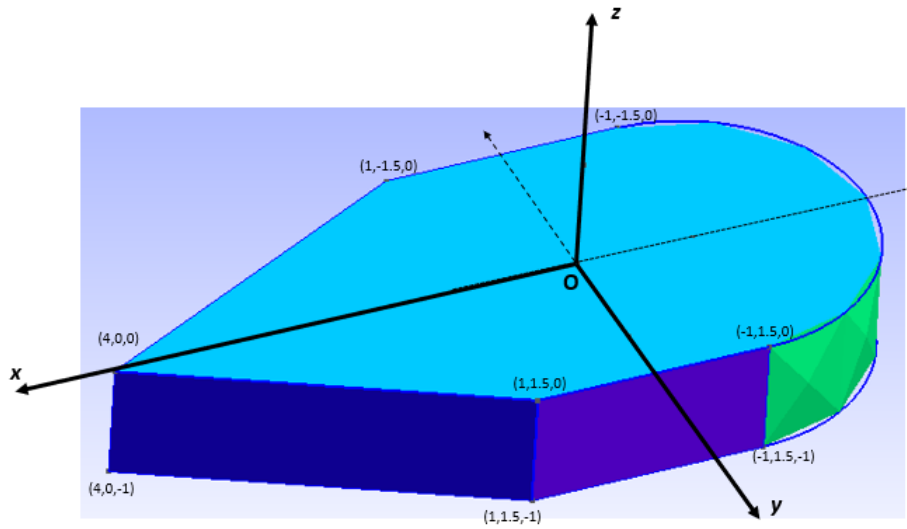


Figura 3.6.3: Dominio de trabajo Ω (Ejemplo 2)

La región visible y la no visible de la frontera de Ω en la figura 3.6.3 representan la frontera Dirichlet y Neumann respectivamente (la región semicircular por completo es tomada como frontera Dirichlet). Los parámetros mecánicos del material están dados por $\lambda = 1$ y $\nu = 0,25$. El vector de desplazamiento exacto esta dado por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x - x^2 \\ y - y^2 \\ z - z^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6.2)$$

La funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} son obtenidas al reemplazar (3.6.2) en (3.2.1), mientras que \mathbf{u}_D se halla tomando el valor de \mathbf{u} en los nodos sobre la frontera Dirichlet. La tabla de errores y la gráfica de convergencia, para la solución del problema planteado, usando (3.4.1) se muestran a continuación.

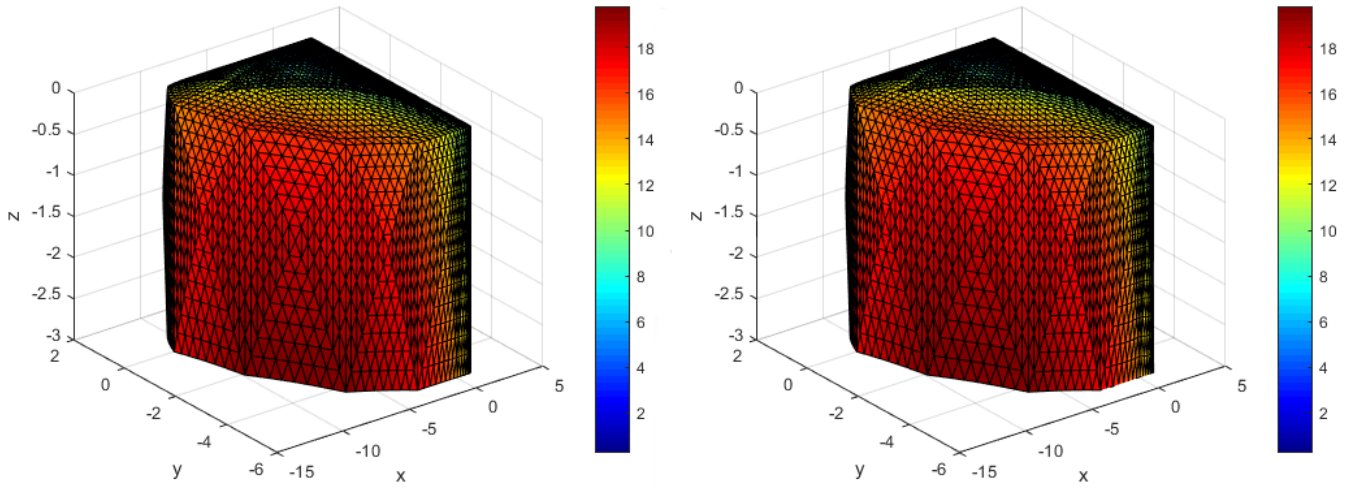


Figura 3.6.4: Desplazamiento Exacto (Izq) vs Aproximado (Der)- Ejemplo 2
Malla: 1536 Elementos, $h = 0,3953$, $\Delta t = 0,1$, $t = 1$

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
294	1.3291	0.4998	*	2.9717	*
2352	1.0636	0.1870	4.4110	1.8459	2.1368
18816	0.6110	0.0812	1.5054	1.1356	0.8763
150528	0.4165	0.0364	2.0944	0.6933	1.2864

Tabla 3.6.2: Errores de la solución aproximada \mathbf{u}_h
PFEM $\mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_1(K)]^3$ - Ejemplo 2

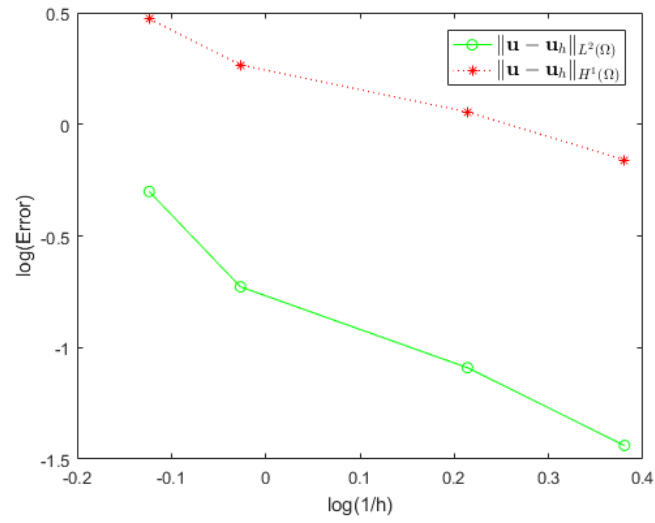


Figura 3.6.5: Convergencia para el desplazamiento $\mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_1(K)]^3$ Ejemplo 2

Capítulo 4

Acople del modelo de flujo y geomecánico

En los capítulos anteriores, se ha estudiado de forma separada un modelo de flujo dado por la ecuación de Darcy y un modelo geomecánico descrito por la ley Hook, en combinación con la teoría de poroelasticidad de Biot; modelos fundamentales a la hora de describir un proceso de recobro mejorado. Debido a que los cambios en la presión de los fluidos en el medio poroso, alteran el estado de esfuerzos del mismo y viceversa, se hace necesario estudiar una estrategia que permita acoplar el modelo de flujo y geomecánico para poder predecir con mayor certeza, los efectos reales asociados a un proceso de inyección de fluidos. A continuación se hace una breve descripción de la implementación por elementos finitos, el acople de la ecuación de Darcy con el modelo geomecánico, utilizando un esquema secuencial e iterativo [33].

4.1. Descripción del modelo físico y matemático

Con el fin de evitar confusiones con la nomenclatura utilizada en los capítulos anteriores, aquí la velocidad de flujo será representada con \mathbf{v} , mientras que el desplazamiento será representado de forma usual, como se hizo en el capítulo anterior con \mathbf{u} . De manera similar a lo descrito anteriormente, el modelo de estudio está sujeto a las suposiciones de un medio poroso isotrópico, flujo de una sola fase, modelo elástico lineal de pequeñas deformaciones, con la diferencia que se considerará estado no estacionario para el flujo y fluido ligeramente compresible.

Sea Ω el dominio de interés con frontera Γ y teniendo en cuenta lo anterior, las ecuaciones a considerar tanto para el fluido como para el medio poroso están dadas por

$$\frac{\mu}{k\rho}\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_f \quad (\text{Ley de Darcy})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}) = g_f \quad (\text{Balance de masa del fluido})$$

$$-\text{div}(\sigma_{ef}) = \mathbf{f}_m \quad (\text{Ecuación de geomecánica}) ,$$

donde ξ es la variación del fluido contenido en el medio. Por la teoría de elasticidad de Biot, se tiene que $\sigma_{ef} = \sigma - \alpha p \mathbf{I}$, con α como el coeficiente Biot como se describió en el capítulo anterior.

Por lo anterior y bajo las condiciones iniciales y de fronteras adecuadas, la formulación fuerte del problema de recobro puede escribirse como

$$(PF) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Hallar } (\mathbf{v}, p, \mathbf{u}) & \text{tal que :} \\ \frac{\mu}{k\rho} \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{d\xi}{dt} + \text{div}(\mathbf{v}) = g_f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ -\text{div}(\sigma) = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ p = p_D & \text{sobre } \Gamma_{Df} \times (0, T) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \omega & \text{sobre } \Gamma_{Nf} \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sobre } \Gamma_{Dg} \times (0, T) \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z} & \text{sobre } \Gamma_{Ng} \times (0, T) \\ p = p_0 & \text{en } \Omega, \quad t = 0 \\ \sigma = \sigma_0 & \text{en } \Omega, \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

donde $\mathbf{f} = \mathbf{f}_m - \alpha \nabla p$, con

$$\Gamma_{Df} \cup \Gamma_{Nf} = \Gamma \quad \text{y} \quad \Gamma_{Df} \cap \Gamma_{Nf} = \emptyset,$$

y además

$$\Gamma_{Dg} \cup \Gamma_{Ng} = \Gamma \quad \text{y} \quad \Gamma_{Dg} \cap \Gamma_{Ng} = \emptyset.$$

Por simplicidad, sea $\mathcal{V} := [L^2(\Omega)]^n$, $\mathcal{Q} := H^1(\Omega)$ y $\mathcal{U} := [H^1(\Omega)]^n$. Además, consideremos también a $\mathcal{Q}_{0D} = \{y \in H^1(\Omega) : y = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$, $\mathcal{Q}_{pD} = \{y \in H^1(\Omega) : y = p_D \text{ en } \Gamma_D\}$ y análogamente defina a \mathcal{U}_{0D} y \mathcal{U}_{uD} . Multiplicando las tres primeras ecuaciones de (4.1.1) por funciones de prueba $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $q \in \mathcal{Q}_{0D}$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_{0D}$ respectivamente, aplicando identidades de Green y considerando las condiciones de frontera adecuadas en cada caso, se obtiene la siguiente formulación variacional:

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar para cada } t > 0, \quad (\mathbf{v}, p, \mathbf{u}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}_{pD} \times \mathcal{U}_{uD} \text{ tal que:} \\ \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_f \cdot \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} q + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q = - \int_{\Omega} g_f q + \int_{\Gamma_{Nf}} \omega q, \quad \forall q \in \mathcal{Q}_{0D} \\ \int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_{Ng}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{0D}. \end{array} \right. \quad (4.1.2)$$

Teniendo en cuenta la teoría expuesta en los capítulos anteriores, es posible mostrar que la formulación variacional (4.1.2) tiene solución única y esto será objeto de un futuro trabajo.

4.2. Modelo numérico y discretización del problema

Sea \mathcal{T}_h una partición regular de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera poligonal Γ , tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, donde los elementos T son tetraedros, $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$. Se definen también, los correspondientes espacios finito dimensionales \mathcal{V}_h , \mathcal{Q}_h y \mathcal{U}_h para \mathcal{V} , \mathcal{Q} y \mathcal{U} respectivamente al igual que los espacios auxiliares \mathcal{Q}_{h0} y \mathcal{U}_{h0} como espacios finito dimensionales de \mathcal{Q}_{0D} y \mathcal{U}_{0D} . Además, sea $\mathcal{N} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ el conjunto de todos los nodos en \mathcal{T}_h .

La formulación variacional discreta para (4.1.2), sin pérdida de generalidad, suponiendo $p_D = 0$ y $\mathbf{u}_D = \mathbf{0}$, puede escribirse como

$$(FVD) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar para cada } t > 0, \quad (\mathbf{v}_h, p_h, \mathbf{u}_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{U}_h \text{ tal que:} \\ \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w}_h + \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \mathbf{w}_h = \int_{\Omega} \mathbf{f}_f \cdot \mathbf{w}_h, \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial \xi_h}{\partial t} q_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h = - \int_{\Omega} g_f q_h + \int_{\Gamma_{Nf}} \omega q_h, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_{h0} \\ \int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon(\mathbf{u}_h) : \epsilon(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_{Ng}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_{h0}. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

De manera similar, a la formulación (4.1.2), puede probarse con la teoría expuesta que (4.2.1) tiene solución única al satisfacer una condición de coercividad estándar y una condición inf-sup discreta. Por otro lado, para la implementación del método de elementos finitos, a continuación se describen las bases para cada una de las variables. Para \mathcal{V}_h , se tiene

$$\{\Psi_i\}_{i=1}^{3L} = \{\underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}_{T_1}, \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}_{T_2}, \dots, \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}_{T_L}\},$$

donde L es el número de tetraedros en \mathcal{T}_h . Por lo anterior, la velocidad de flujo se puede aproximar como

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^{3L} \bar{v}_i \Psi_i. \quad (4.2.2)$$

Por otro lado, una base para \mathcal{Q}_h está dada por

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^N = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\},$$

con N número de nodos, por lo que la presión se puede aproximar como

$$p_h = \sum_{i=1}^N \bar{p}_i \varphi_i, \quad (4.2.3)$$

con $\varphi_i(X) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$ tal que $\varphi_i(X_j) = \delta_{ij}$. Por último, una base para \mathcal{U}_h está dada por

$$\{\Phi_i\}_{i=1}^{3N} = \{\varphi_1 \mathbf{e}_1, \varphi_1 \mathbf{e}_2, \varphi_1 \mathbf{e}_3, \varphi_2 \mathbf{e}_1, \varphi_2 \mathbf{e}_2, \varphi_2 \mathbf{e}_3, \dots, \varphi_N \mathbf{e}_1, \varphi_N \mathbf{e}_2, \varphi_N \mathbf{e}_3\},$$

por lo que el desplazamiento puede aproximarse como $\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{3N} \bar{u}_i \Phi_i$. Algunos detalles extras son descritos en los capítulos anteriores.

4.3. Estrategia iterativa

Existen varias estrategias para aproximar la solución del problema acoplado de flujo y de geomecánica, sin embargo en este apartado se describirá un esquema iterativo que resuelve el problema por partes de manera secuencial para cada paso de tiempo. La idea principal consiste en fijar la presión, resolver la parte mecánica y luego fijar desplazamientos y resolver el modelo de flujo.

Antes de explicar en detalle la estrategia iterativa para el acople, es necesario precisar algunas cosas. De la teoría de poroelasticidad de Biot, se tiene que

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{M} \frac{dp}{dt} + \alpha \frac{d\epsilon_v}{dt},$$

donde ϵ_v es la traza del tensor de deformaciones y M es conocido como el modulo de Biot [33]. Discretizando la parte temporal usando la fórmula de Euler hacia atrás se tiene lo siguiente:

$$\frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^{(m+1)} \cdot \mathbf{w}_h + \int_{\Omega} \nabla p_h^{(m+1)} \cdot \mathbf{w}_h = \int_{\Omega} \mathbf{f}_f \cdot \mathbf{w}_h \quad (4.3.1)$$

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{M} \frac{p_h^{(m+1)} - p_h^{(t)}}{\Delta t} q_h - \int_{\Omega} \alpha \frac{\epsilon_v^{(m+1)} - \epsilon_v^{(t)}}{\Delta t} q_h + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^{(m+1)} \cdot \nabla q_h = -\int_{\Omega} g_f q_h + \int_{\Gamma_{Nf}} \omega q_h \quad (4.3.2)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \epsilon(\mathbf{u}_h)^{(m+1)} : \epsilon(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_{Ng}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_h, \quad (4.3.3)$$

con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A continuación se describe paso a paso la secuencia del método iterativo para el acople, en aras de aproximar \mathbf{v} , p y \mathbf{u} en el tiempo $m+1$:

Datos conocidos

p_0 : Presión inicial ($t=0$).

$\epsilon_v^{(0)}$: Asociado al estado de esfuerzos inicial.

\mathbf{f}_f : Fuerzas volumétricas del fluido.

g_f : Fuentes o sumideros para la masa del fluido.

\mathbf{f}_m : Fuerzas volumétricas del medio poroso.

Paso 1: Suponer p en tiempo t_{m+1} calcular su gradiente y calcular $\mathbf{f} = \mathbf{f}_m - \alpha \nabla p$.

Paso 2: Aproximar \mathbf{u} en tiempo t_{m+1} en (4.3.3) implementando el método de elementos finitos (formulación primal) descrito en el Capítulo 3.

Paso 3: Con \mathbf{u} del paso anterior encontrar $\epsilon_v = \text{div}(\mathbf{u})$ en t_{m+1} .

Paso 4: Aproximar (\mathbf{v}, p) en el tiempo t_{m+1} con (4.3.1) y (4.3.2) implementado el método de elementos finitos.

Paso 5: Comparar presión del paso 4 y paso 1. Si existe convergencia avanzar en tiempo, de lo contrario regresar al paso 1 suponiendo presión del paso 4.

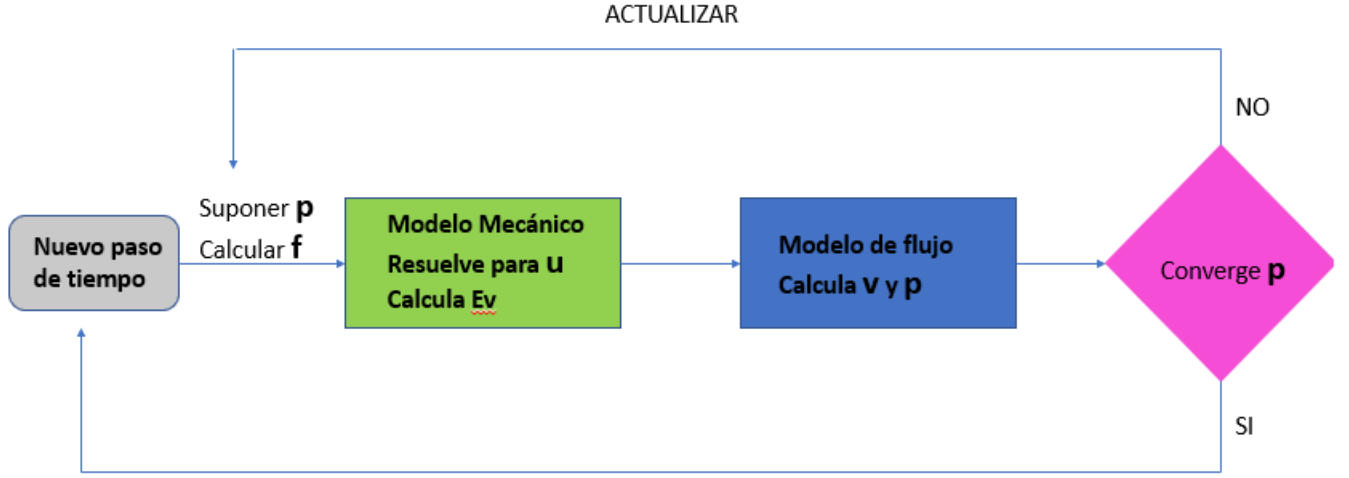


Figura 4.3.1: Estrategia iterativa de solución para el problema acoplado

De los pasos mencionados anteriormente, el que necesita mayor descripción al respecto es el paso 4, ya que a lo largo de este trabajo, hasta ahora solo se ha trabajado la ecuación de Darcy en estado estacionario bajo la condición de incompresibilidad del fluido.

4.3.1. Darcy no estacionario (Implementación)

La implementación del método de elementos finitos mixtos para resolver el problema de Darcy no estacionario se sigue de manera similar a lo establecido en el Capítulo 1. Este apartado, en particular hace énfasis en el caso tridimensional y muchos de los resultados se siguen de la sección 1.4.

El problema fuerte de Darcy no estacionario tiene la forma

$$(PF) \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{v}, p) \text{ tal que:} \\ \frac{\mu}{k\rho} \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{dp}{dt} + \text{div}(\mathbf{v}) = g & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ p = p_D & \text{sobre } \Gamma_D \times (0, T) \\ p = p_0 & \text{en } \Omega, \quad t = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \omega & \text{sobre } \Gamma_D \times (0, T). \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Notemos que (4.3.1) y (4.3.2), corresponden a la formulación variacional totalmente discreta de (4.3.4), usando Euler hacia atrás para aproximar $\frac{dp}{dt}$ y tomando

$$g = g_f - \alpha \frac{d\epsilon_v}{dt},$$

es decir

$$(FVMD) \begin{cases} \text{Dado } p_h^{(0)} \text{ Hallar } (\mathbf{v}_h, p_h)^{(m+1)} \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{v}_h^{(m+1)}, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{w}_h, p_h^{(m+1)}) = F(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h \\ b(\mathbf{v}_h^{(m+1)}, q_h) - c(p_h^{(m+1)}, q_h) = G(q_h) \quad \forall q \in \mathcal{Q}_{h0}, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_h^{(t+1)}, \mathbf{w}_h) &= \frac{\mu}{k\rho} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^{(t+1)} \cdot \mathbf{w}_h && \text{Forma bilineal } \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\mathbf{w}_h, q_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \nabla q_h && \text{Forma bilineal } \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_{h0} \rightarrow \mathbb{R}, \\ c(p_h, q_h) &= \frac{1}{M\Delta t} \int_{\Omega} p_h^{(t+1)} q_h && \text{Forma bilineal } \mathcal{Q}_h \times \mathcal{Q}_{h0} \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(\mathbf{w}_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_h && \text{Funcional lineal } \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(q_h) &= -\frac{1}{M\Delta t} \int_{\Omega} p_h^{(t)} q_h - \int_{\Omega} g q_h + \langle \omega, q_h \rangle_{\Gamma_N} && \text{Funcional lineal } \mathcal{Q}_{h0} \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Reemplazando (4.2.2) y (4.2.3) en (4.3.5) se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(t+1)} \\ p^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_F \\ \mathbf{b}_G \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3L \times 3L}$, $A_{i,j} = a(\Psi_i, \Psi_j)$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3L \times N}$, $B_{i,j} = b(\Psi_i, \varphi_l)$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $C_{i,j} = c(\varphi_i, \varphi_l)$, $\mathbf{b}_F \in \mathbb{R}^{3L}$, $b_{Fj} = F(\Psi_j)$, $\mathbf{b}_G \in \mathbb{R}^N$, $b_{Gl} = G(\varphi_l)$.

La forma de calcular las entradas de los correspondientes arreglos locales de \mathbf{A} , \mathbf{B} y de \mathbf{b}_F , teniendo en cuenta las bases arriba mencionadas para la velocidad de flujo y la presión, se describieron en detalle en la Sección 1.4.2. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} c(\varphi_i, \varphi_l) &= \frac{1}{M\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_l = \frac{1}{M\Delta t} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi_i^T \varphi_l^T \\ G(\varphi_l) &= -\frac{1}{M\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \bar{p}_i^{(m)} \varphi_i \varphi_l - \int_{\Omega} g \varphi_l + \int_{\Gamma_N} \omega \varphi_l \\ &= \underbrace{-\frac{1}{M\Delta t} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(\sum_{i=1}^4 \bar{p}_i^{(m)} \varphi_i^T \right) \varphi_l^T}_{\mathbf{b}_{G1}} - \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T g \varphi_l^T}_{\mathbf{b}_{G2}} + \underbrace{\sum_{K \in \Gamma_N} \int_K \omega \varphi_l^T}_{\mathbf{b}_{G3}}, \end{aligned}$$

donde φ_i^T y φ_l^T son las funciones básicas para la presión en cada tetraedro y \bar{p}_i^m se asume conocido (calculado previamente)

Las componentes de la matriz \mathbf{C} local, están dadas por

$$C_{i,l}^T = \frac{1}{M\Delta t} \int_T \varphi_i^T \varphi_l^T,$$

por lo que considerando las propiedades de las funciones $\varphi_l(X)$ mencionadas arriba, y utilizando una fórmula de cuadratura de cinco puntos para integrar sobre tetraedros [48], se obtiene que

$$\mathbf{C}^T = \frac{|T|}{M\Delta t} \begin{bmatrix} 1/10 & 1/20 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/20 & 1/10 & 1/20 \\ 1/20 & 1/20 & 1/20 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

Por su parte, los arreglos vectoriales locales asociados a \mathbf{b}_G son como se describen a continuación:

Sea $\bar{\mathbf{p}}$ el vector de coeficientes \bar{p}_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ para cada tetraedro en el tiempo t . Entonces

$$\mathbf{b}_{G1}^T = \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{p}}.$$

Por otro lado, el vector \mathbf{b}_{G2} local, usando nuevamente la cuadratura de cinco puntos para la integración sobre tetraedros y las propiedades de $\varphi_l(X)$, se calcula como

$$\mathbf{b}_{G2}^T = \begin{bmatrix} \int_T g\varphi_1 \\ \int_T g\varphi_2 \\ \int_T g\varphi_3 \\ \int_T g\varphi_4 \end{bmatrix} = |T| \left(-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} g(\hat{a}) \\ g(\hat{a}) \\ g(\hat{a}) \\ g(\hat{a}) \end{bmatrix} + \frac{9}{20} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(\hat{b}) \\ g(\hat{c}) \\ g(\hat{d}) \\ g(\hat{e}) \end{bmatrix} \right),$$

donde \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} , \hat{e} , son los puntos de integración. Para finalizar, \mathbf{b}_{G3} local, se calcula como se describió en la Sección 1.4.2

Comentario 4.3.1. *Las condiciones de frontera Dirichlet son impuestas de manera fuerte, tal y como se mencionó en la Sección 1.4.2.*

4.3.2. Ejemplo Darcy no estacionario

Considere el siguiente problema no homogéneo:

Sea $\Omega := [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \partial\Omega : y = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \partial\Omega : z = 1\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. Por simplicidad considere $\mu = k = \rho = M = 1$. considere un intervalo de tiempo entre 0 y 1, con $\Delta t = 0,1$. Los datos del problema vienen dados por el campo de presión exacto $p = e^{txyz}$, ya que para este caso en particular se tiene a $\mathbf{v} = -\nabla p$. A continuación se muestra un gráfico que compara el campo de velocidad exacto con el aproximado, además de la tabla de errores del problema planteado para $h = 0,3953$ y $t = 1$, seguido de las gráficas de convergencia para la velocidad \mathbf{v} y la presión p .

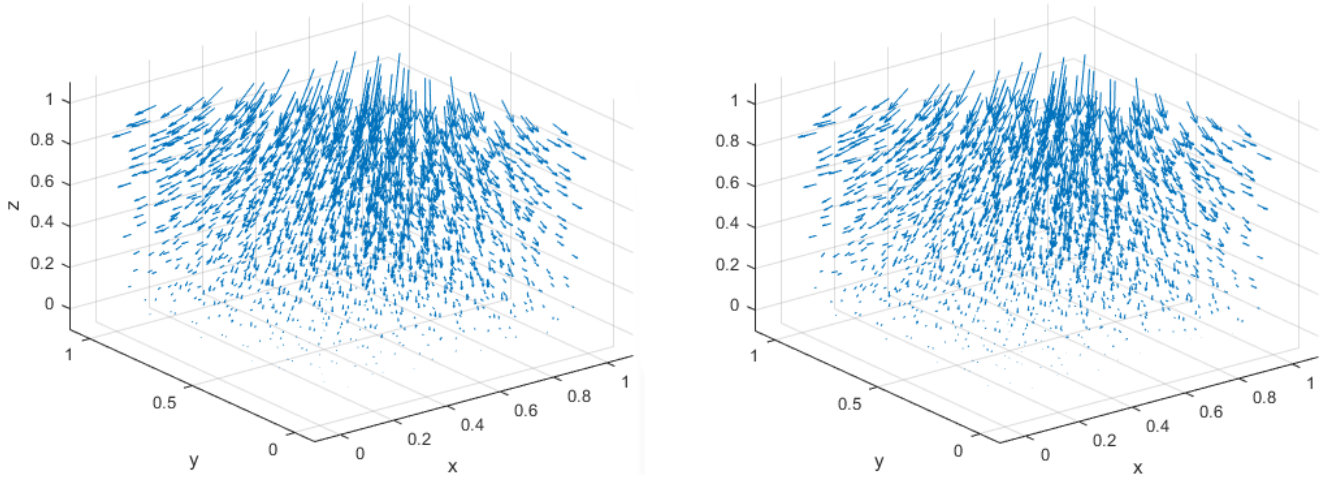


Figura 4.3.2: Campo de velocidad Exacta (Izq) vs Aproximada (Der)

MFEM $(\mathbf{v}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^3 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 1536 Elementos, $h = 0,3953$, $\Delta t = 0,1$, $t = 1$ - Darcy no Estacionario

Elementos	h	$\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\ _{[L^2(\Omega)]^3}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
24	1	0.4239	*	0.0503	*	0.4269	*
192	0.6124	0.1808	1.7377	0.0115	3.0092	0.1812	1.7476
1536	0.3953	0.0946	1.4797	0.0033	2.8519	0.0947	1.4824
12288	0.2652	0.0582	1.2169	0.0012	2.5343	0.0582	1.2196
98304	0.1712	0.0350	1.1619	0.0005	2.0003	0.0351	1.1554

Tabla 4.3.1: Errores de la solución aproximada

MFEM $(\mathbf{v}, p) \in [L^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$ para $t = 1$, $\Delta t = 0,1$ - Darcy no estacionario

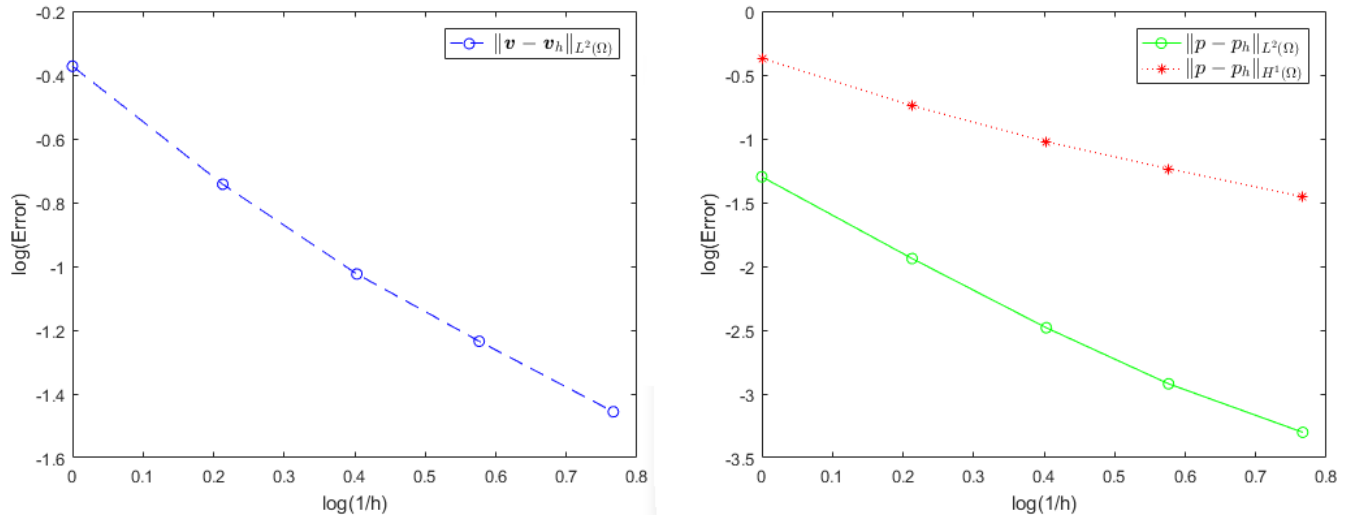


Figura 4.3.3: Convergencia para $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3$ y $p \in H^1(\Omega)$ Darcy no estacionario

4.4. Experimento numérico para el acople

Considere el siguiente problema con parte geomecánica y de flujo.

Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ y $\partial\Omega = \Gamma_{Dg}$. Los parámetros mecánicos del material están dados por $E = 100$, $\nu = 0,35$, $\alpha = 0,9$ y $M = 100$. Por otro lado, se tiene que $\Gamma_{Nf} = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 1\}$ y $\Gamma_{Df} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{Nf}$. Por simplicidad se considerará $k = \mu = \rho = 1$. Los datos tanto para el problema mecánico como para el de flujo, son determinados por las soluciones exactas del problema para \mathbf{u} , \mathbf{v} y p dados por

$$\mathbf{u} = t \begin{bmatrix} x - x^2 \\ y - y^2 \\ z - z^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x^2 \\ yx \\ z \end{bmatrix}, \quad p = xyz + t.$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos al seguir los pasos descritos en la estrategia iterativa.

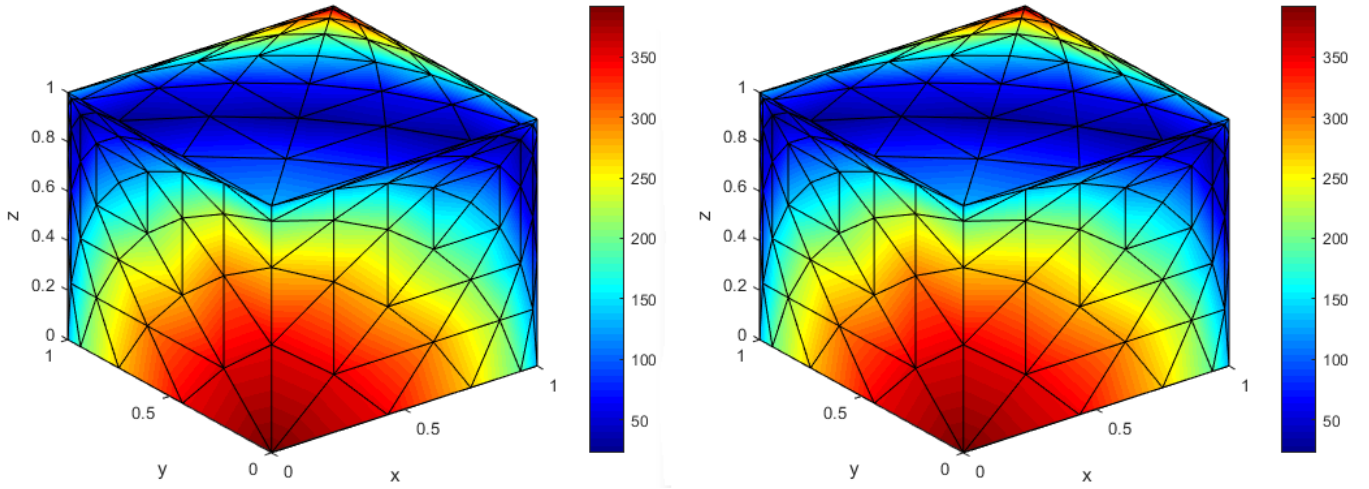


Figura 4.4.1: Desplazamiento Exacto (Izq) vs Aproximado (Der) - 3D - Acople
Malla: 1536 Elementos, $h = 0,3953$, $\Delta t = 0,1$, $t = 1$

Elementos	h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
24	1	0.1096	*	0.6547	*
192	0.6124	0.0323	2.4915	0.3723	1.1511
1536	0.3953	0.0099	2.7014	0.2264	1.1362
12288	0.2652	0.0037	2.4656	0.1408	1.1899

Tabla 4.4.1: Errores de la solución aproximada u_h
PFEM $\mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_1(K)]^3$ - para $t = 1$, $\Delta t = 0,1$ - Acople

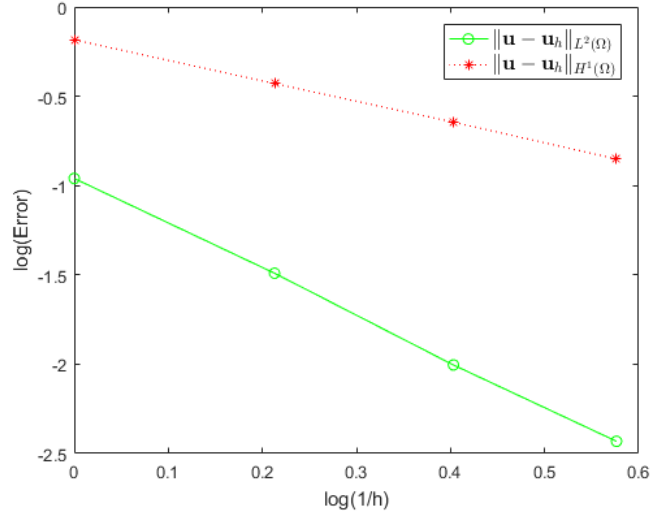


Figura 4.4.2: Convergencia para el desplazamiento $\mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_1(K)]^3$ - Acople

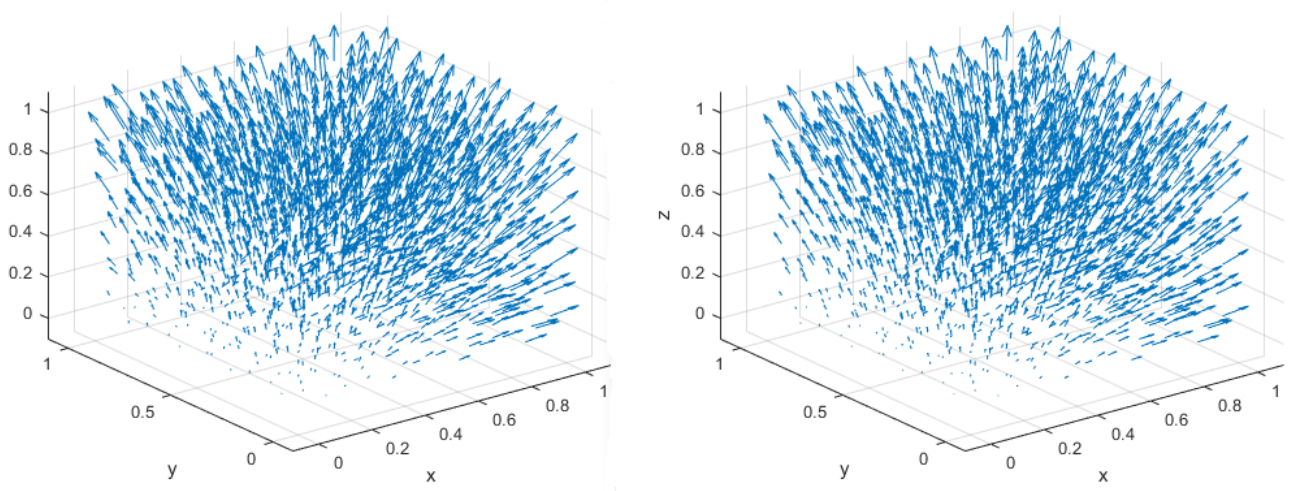


Figura 4.4.3: Campo de velocidad Exacta (Izq) vs Aproximada (Der)

MFEM $(\mathbf{v}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^3 \times \mathbb{P}_1(K)$

Malla: 1536 Elementos, $h = 0,3953$, $\Delta t = 0,1$, $t = 1$ - Acople

Elementos	h	$\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\ _{[L^2(\Omega)]^3}$	Orden	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	Orden	$\ p - p_h\ _{H^1(\Omega)}$	Orden
24	1	0.2773	*	0.0192	*	0.2556	*
192	0.6124	0.1563	1.1691	0.0063	2.2724	0.1438	1.1729
1536	0.3953	0.0903	1.2533	0.0023	2.3019	0.0844	1.2172
12288	0.2652	0.0514	1.4117	0.0009	2.3506	0.0486	1.3827

Tabla 4.4.2: Errores de la solución aproximada

MFEM $(\mathbf{v}, p) \in [L^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$ para $t = 1$, $\Delta t = 0,1$ - Acople

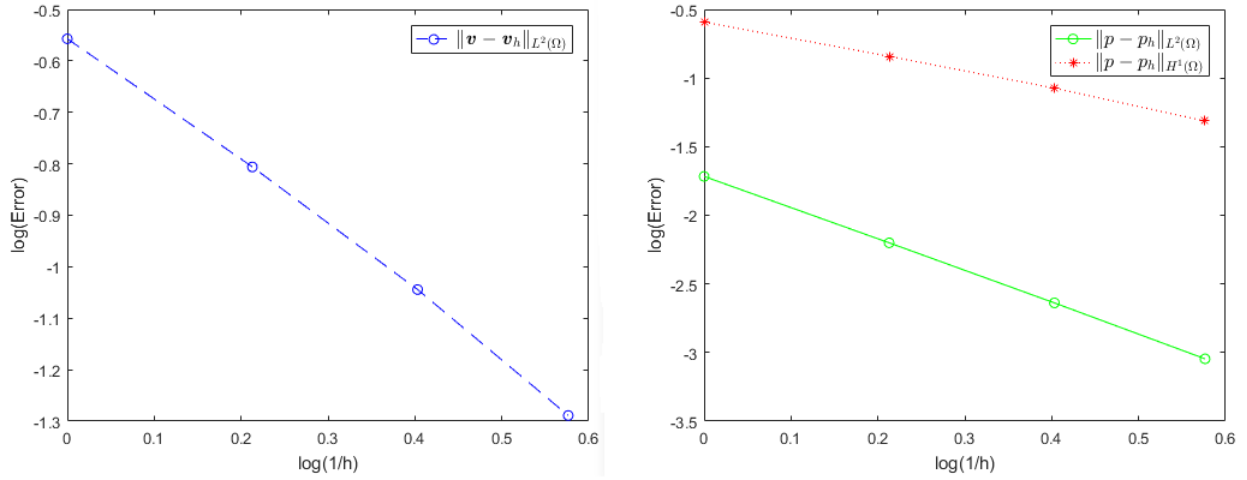


Figura 4.4.4: Convergencia para $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3$ y $p \in H^1(\Omega)$ - 3D -Acople

Comentario 4.4.1. Debido a limitaciones computacionales, no es posible correr mallas más finas, y esto dificulta un poco, poder apreciar de manera más precisa los órdenes de convergencia tanto para el desplazamiento, la velocidad de flujo y la presión en las distintas normas.

Conclusiones

En este trabajo, se deja evidencia del desarrollo analítico y numérico para aproximar la solución del problema de Darcy y el de geomecánica asociada a un modelo de poroelasticidad lineal, implementando el método de elementos finitos. A continuación se describen algunos de los aspectos más relevante estudiados en cada uno de los capítulos.

En el marco del primer capítulo, al implementar el método de elementos finitos usando dos formulaciones variacionales diferentes para el caso bidimensional, independientemente de la geometría del dominio, se alcanzan muy buenas aproximaciones de la solución exacta. Sin embargo, es notable que la convergencia de la presión en $L^2(\Omega)$ se alcanza con mayor rapidez en la formulación con espacios en $[L^2(\Omega)]^n \times H^1(\Omega)$ que en la de espacios $H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ para la velocidad y la presión respectivamente, lo que representa cierta ventaja sobre la otra. Además, en problemas prácticos hay que tener en cuenta la regularidad de las variables para poder elegir a la que adapte mejor a las condiciones del problema.

En el segundo capítulo, se estudiaron dos formas no lineales de ecuación de Darcy, correspondientes a condiciones de flujo diferentes. Cuando el término de permeabilidad depende de la presión, es indispensable tener en cuenta las condiciones necesarias para que la solución en todo el dominio sea única. La implementación para este problema en particular, puede ser extendida fácilmente al caso tridimensional, teniendo en cuenta la implementación del problema Darcy estudiado al final del primer capítulo, pues solo habría que modificar la primera matriz del sistema. Por otro lado, es de notar que a pesar que la ecuación descrita en el Capítulo 2 conduce a sistemas no lineales, estos pueden ser aproximados sin mayor inconveniente por un método iterativo de punto fijo.

En el tercer capítulo se implementó una formulación primal del método de elementos finitos, para aproximar la solución de un problema de geomecánica, asociado a un modelo elástico lineal obteniendo buenas aproximaciones tal y como se evidencia en las tablas de error. Cabe recalcar que para un problema con frontera Neumann puro, se deben satisfacer las condiciones de compatibilidad descritas en el capítulo, para que la solución sea única. Otra limitante del esquema utilizado, es que no es aplicable a materiales incompresibles, ya que en este tipo de problemas $\lambda \rightarrow \infty$.

Con relación al último capítulo, normalmente las técnicas de acople para los problemas de flujo y geomecánica, implementando el método de elementos finitos, desde el punto de vista matemático, son muy poco estudiados, y las aplicaciones numéricas reportadas en la literatura, están limitadas para los casos 1D y 2D. Además que los espacios de aproximación para la velocidad y la presión son $H(\text{div}; \Omega)$ y $L^2(\Omega)$ respectivamente, lo cual difiere con lo estudiado en el Capítulo

4, donde los espacios respectivos fueron $[L^2(\Omega)]^3$ y $H^1(\Omega)$, lo que convierte de cierta manera a este trabajo como pionero en el tema y anima a realizar un análisis matemático del error en un futuro trabajo.

En términos generales, las aplicaciones numéricas utilizando el método de elementos finitos para los casos tridimensionales, necesitan un número mayor de mallas para poder apreciar el orden de convergencia para las variables en los distintos espacios de aproximación, en comparación con los casos unidimensionales y bidimensiones. Teniendo en cuenta lo anterior y debido a limitaciones computacionales, el orden de convergencia para las variables asociadas al desplazamiento, velocidad de flujo y presión, para algunos de los ejemplos en tres dimensiones abordados en este trabajo no es tan fino como quisiéramos.

Por último, este trabajo abre las puertas para profundizar un poco más sobre la implementación del método de elementos finitos para resolver ecuaciones de flujo de fluidos y problemas geomecánicos de mayor complejidad utilizadas en el campo de la ingeniería. De forma más explícita se podría abordar problemas de flujo en medios porosos que involucre más de una componente en distintas fases. Por otra parte, el modelo de geomecánica, puede ser adaptado para modelos de poroplasticidad y de fracturamiento. En ambos tipos de problemas es factible incorporar los efectos debido a la temperatura y así optimizar las soluciones, acercándose cada vez más a problemas reales.

Bibliografía

- [1] AADNOY, B., AND LOOYEH, R. *Petroleum rock mechanics: drilling operations and well design*. Gulf Professional Publishing, 2011.
- [2] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.
- [3] AKIN, J. E. *Finite element analysis with error estimators: An introduction to the FEM and adaptive error analysis for engineering students*. Elsevier, 2005.
- [4] ALBERTY, J., CARSTENSEN, C., AND FUNKEN, S. A. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms* 20, 2-3 (1999), 117–137.
- [5] ALBERTY, J., CARSTENSEN, C., FUNKEN, S. A., AND KLOSE, R. Matlab implementation of the finite element method in elasticity. *Computing* 69, 3 (2002), 239–263.
- [6] AUDU, J. D., FAIRAG, F. A., AND MESSAOUDI, S. A. On the well-posedness of generalized Darcy–Forchheimer equation. *Boundary Value Problems* 2018, 1 (2018), 123.
- [7] AZAÍEZ, M., BELGACEM, F. B., BERNARDI, C., AND CHORFI, N. Spectral discretization of Darcy’s equations with pressure dependent porosity. *Applied Mathematics and Computation* 217, 5 (2010), 1838–1856.
- [8] AZIZ, K., AND SETTARI, A. *Petroleum reservoir simulation: Applied science publ. Ltd., London* (1979).
- [9] BAHRIAWATI, C., AND CARSTENSEN, C. Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.* 5, 4 (2005), 333–361.
- [10] BIOT, M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of applied physics* 26, 2 (1955), 182–185.
- [11] BLAHETA, R., HASAL, M., DOMESOVÁ, S., AND BEREŠ, M. Rt1-code: A mixed RT0- P0 Raviart-Thomas finite element implementation, 2014.
- [12] BRENNER, S., AND SCOTT, R. *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 15. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13] BREZZI, F., AND FORTIN, M. *Mixed and hybrid finite element methods*, vol. 15. Springer Science & Business Media, 2012.

- [14] BREZZI, F., RAPPAZ, J., AND RAVIART, P.-A. Finite dimensional approximation of nonlinear problems. *Numerische Mathematik* 36, 1 (1980), 1–25.
- [15] CHEN, K. P., JIN, Y., AND CHEN, M. Pressure-gradient singularity and production enhancement for hydraulically fractured wells. *Geophysical Journal International* 195, 2 (2013), 923–931.
- [16] CIARLET, P. G. The finite element method for elliptic problems. *Classics in applied mathematics* 40 (2002), 1–511.
- [17] DARCY, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application...* Victor Dalmont, 1856.
- [18] DAS, M. K., MUKHERJEE, P. P., AND MURALIDHAR, K. *Modeling Transport Phenomena in Porous Media with Applications*. Springer, 2018.
- [19] DONALDSON, E. C., CHILINGARIAN, G. V., AND YEN, T. F. *Enhanced oil recovery, I: fundamentals and analyses*. Elsevier, 1985.
- [20] FALK, R. S. Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity. *mathematics of computation* 57, 196 (1991), 529–550.
- [21] FARHLOUL, M. A mixed finite element method for a nonlinear Dirichlet problem. *IMA journal of numerical analysis* 18, 1 (1998), 121–132.
- [22] FARHLOUL, M., AND MANOUZI, H. On a mixed finite element method for the p-Laplacian. *Canad. Appl. Math. Quart* 8, 1 (2000), 67–78.
- [23] GATICA, G. N. Introducción al análisis funcional: Teoría y aplicaciones. parte.
- [24] GATICA, G. N. A simple introduction to the mixed finite element method. *Theory and Applications. Springer Briefs in Mathematics*. Springer, London (2014).
- [25] GATICA PÉREZ, G. N., RUIZ BAIER, R., AND TIERRA CHICA, G. A mixed finite element method for Darcy’s equations with pressure dependent porosity. *Mathematics of Computation* 85 (2016), 1–33.
- [26] GIRAULT, V., MURAT, F., AND SALGADO, A. Finite element discretization of Darcy’s equations with pressure dependent porosity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 44, 6 (2010), 1155–1191.
- [27] GIRAULT, V., AND RAVIART, P.-A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] GIRAULT, V., AND WHEELER, M. F. Numerical discretization of a Darcy–Forchheimer model. *Numerische Mathematik* 110, 2 (2008), 161–198.
- [29] GLOWINSKI, R., AND MARROCO, A. Sur l’approximation, par éléments finis d’ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d’une classe de problèmes de dirichlet non linéaires. *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique* 9, R2 (1975), 41–76.

- [30] GOCKENBACH, M. S. *Understanding and implementing the finite element method*, vol. 97. Siam, 2006.
- [31] HUDSON, J. A., AND HARRISON, J. P. *Engineering rock mechanics: an introduction to the principles*. Elsevier, 2000.
- [32] JAEGER, J. C., COOK, N. G., AND ZIMMERMAN, R. *Fundamentals of rock mechanics*. John Wiley & Sons, 2009.
- [33] JHA, B., AND JUANES, R. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics. *Acta Geotechnica* 2, 3 (2007), 139–153.
- [34] JOHN, V. *Finite element methods for incompressible flow problems*. Springer, 2016.
- [35] JUDD, W. R. Rock stress, rock mechanics and research. In *State of Stress in the Earth's Crust Conf.*, Elsevier, NY (1964), pp. 4–53.
- [36] KOKO, J. Vectorized Matlab codes for linear two-dimensional elasticity. *Scientific Programming* 15, 3 (2007), 157–172.
- [37] LAUTRUP, B. Physics of continuous matter. *Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World*, IOP (2005).
- [38] MASUD, A., AND HUGHES, T. J. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191, 39-40 (2002), 4341–4370.
- [39] PAN, H., AND RUI, H. Mixed element method for two-dimensional Darcy-Forchheimer model. *Journal of Scientific Computing* 52, 3 (2012), 563–587.
- [40] RAJAGOPAL, K. On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 17, 02 (2007), 215–252.
- [41] SCHRÖDER, J., AND WRIGGERS, P. *Advanced Finite Element Technologies*, vol. 566. Springer, 2016.
- [42] SHIKHMURZAEV, Y. D. Darcy’s law for two-dimensional flows: Singularities at corners and a new class of models. *AIChE Journal* 63, 11 (2017), 5207–5214.
- [43] SHOWALTER, R. E. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, vol. 49. American Mathematical Soc., 2013.
- [44] SÜLI, E. Finite element methods for partial differential equations. *University of Oxford* (2007).
- [45] TARTAR, L. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [46] WANG, C., WANG, J., WANG, R., AND ZHANG, R. A locking-free weak Galerkin finite element method for elasticity problems in the primal formulation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 307 (2016), 346–366.

- [47] ZEIDLER, E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Nonlinear Monotone operators, 1990. *Dumitru Motreanu Département de Mathématiques, Université de Perpignan 66025*.
- [48] ZHANG, L., CUI, T., AND LIU, H. A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedra. *Journal of Computational Mathematics* (2009), 89–96.